答えは出るけれど

柏陵高等学校 氏家 悟

1 試験問題訂正

数年前，三角関数のテスト監督をしていたら，回ってきた担当者が定数を訂正.
「そのままでも答えは出るけど，ふさわしくないので直します.」
と，次のような問題

問 1 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

で，$\sqrt{3}$ を $\dfrac{1}{2}$ に直した.

正しく直した問題

問 2 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

では，与式の両辺を 2 乗して，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{8}$ が求められ，続きとして $\sin\theta$， $\cos\theta$ のそれぞれの値を求めたりして，たとえば $\sin\theta = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$ などと求められる．このとき，θ はおよそ 66° くらいである.

直す前の，$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{3}$ の場合も，同じ計算で $\sin\theta\cos\theta = -1$ が求められるが，このとき，$2\sin\theta\cos\theta = -2$ より $\sin 2\theta = -2$ となり，高校の範囲では存在しない三角関数を扱う問題となってしまう.

そこまで計算しなくても，問題の左辺を三角関数の合成を使えば，$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2} \leqq$ 左辺 $\leqq \sqrt{2}$ の範囲しか取れないなから，$\sqrt{3}$ となることはない.

試験監督をしながら，正しい問題のときと同じ手順で 右辺が $\sqrt{3}$ の場合を計算したら，$\sin\theta + \cos\theta = \pm i$ となってしまった．このとき，$\sin\theta$ の値も虚数 $\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$，それを満たす θ も虚数 $\dfrac{\pi}{4} + i\log\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ である.

2 ベクトルの問題

昨年，進学補習で使ったベクトルの教材の問題に，答えは出るが「図の描けない問題」があった.

問 3 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

これは普通に，$|\vec{a}+3\vec{b}|=1$ の両辺を 2 乗すれば，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{5}{3}$ と求まるもので，基礎的な問題ではある．

私は，計算問題であっても，図が描けるものは出来るだけ図を描いて説明する．それは，単に計算だけではなく図形的な意味もあわせて理解して欲しいからなのであるが，それ以上に，自分の計算結果に確信が持てずに，図を描いて納得したいという気持ちもある．そのために $\cos\theta$ を求めたら，存在しないことがわかった．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\dfrac{5}{3}$ より，$\cos\theta=-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}=-\dfrac{7.07}{6}<-1$ である．

すなわち，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=1$ であるような 3 つのベクトルでは三角形にならないといえる．

また，$\mathrm{AB}=|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=|3\vec{b}|=3$，$\mathrm{AC}=|\vec{a}+3\vec{b}|=1$ となる三角形を考えると，$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\sqrt{2}+1=2.414$ なので，$\mathrm{BC}=3$ が長すぎて，三角形にならない．つまり，三角不等式 $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>\mathrm{BC}$ を満たさない．

成分で考えても，$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 0)$，$\vec{b}=(p,\ q)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$ より $p^2+q^2=1$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=1$ より $(\sqrt{2}+3p)^2+(0+3q)^2=1$．これらを解くと，$q=\dfrac{\sqrt{14}}{6}i$ と虚数になる．

すなわち，この問題のような実ベクトルは存在しない．存在はしないけど，とりあえず計算して答えは出るので，チェックから漏れたのだろう．

ということで，$|\vec{a}+3\vec{b}|$ が存在できる範囲を求めてみる．

問 4 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=k$ のとき，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の存在する実数 k を求めよ．

（答え）$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=k^2$ を展開して変形すると $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{k^2-11}{6}$ より，$\cos\theta=\dfrac{k^2-11}{6\sqrt{2}}$．

$-1\leqq\dfrac{k^2-11}{6\sqrt{2}}\leqq 1$ から $11-6\sqrt{2}\leqq k^2\leqq 11+6\sqrt{2}$，$3-\sqrt{2}\leqq k\leqq 3+\sqrt{2}$．

あるいは，「$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{k}$ のとき，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の存在する整数 k を求めよ．」という問題であれば，$3\leqq k\leqq 19$ であるし，$|\vec{a}+3\vec{b}|=n$ となる整数ならば，$n=2,\ 3,\ 4$．

さらに，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求める問題にしたければ，$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{5}$ で 135 度，$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{11}$ で直角，$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{17}$ で 45 度である．