ある定積分の最小値問題の一般的解法と三角関数の不思議な等式

県立柏高等学校 西川 誠

ブルーバックスの「入試数学 伝説の良問 100」（安田亨）[1] は，1971 年〜2002 年の大学入試問題の中から真に演習に値する良問を集めた問題集です。その中の問題 94 を，2008 年 11 月 16 日に一般化することができ，その証明の過程で不思議な三角関数の和公式が発見できましたので，今回のレポートではそれを紹介します。証明はともかく，§4 の数値実験だけでも読んでもらえれば，不思議な三角関数の和公式がどんなものなのかわかりますので，ぜひコンピュータで実験していただけたらと思います。

1　問題 94(1971 年日大 · 医) とその (安田先生の) 解法

問題 94 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x^2+ax+b|\,dx=\frac{1}{2}$ が成立するとき，曲線 $y=f(x)$ は，x 軸と 異なる 2 点で交わり，それらの交点はともに 2 点 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の間にあることを証明せよ。

(余談) この問題を高校生だった安田先生が苦労して解き，さらにその拡張について考えたことなどをある大学教授に送ったら，4 日後に 20 ページ，翌日にも 20 ページの速達が届き，感動に震えたとのエピソードが書いてありました。

（安田先生の本 [1] にある証明の概略）

$$f(x)=x^2+ax+b,\ \ F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx$$

とおくとき $-1 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ である任意の α, β と、任意の a, b に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx &= \int_{-1}^{\alpha}|f(x)|\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\,dx+\int_{\beta}^{1}|f(x)|\,dx\\ &\geqq \int_{-1}^{\alpha}f(x)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{1}f(x)\,dx\\ &= F(\alpha)-F(-1)-\{F(\beta)-F(\alpha)\}+F(1)-F(\beta)\\ &= F(1)-F(-1)-2\times\{F(\beta)-F(\alpha)\}\end{aligned}$$

が成立します.

(注) 区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で $f(x)$ がマイナスであっても，プラスであっても，成立しています。つまり

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \geqq F(1) - F(-1) - 2 \times \{F(\beta) - F(\alpha)\}$$

がいつでも成立している訳です。

ここで，右辺を整理すると，次のようになります[*1] 。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3} \times \left\{1^3 - (-1)^3 - 2 \times (\beta^3 - \alpha^3)\right\}\\ &+ \frac{a}{2} \times \left\{1^2 - (-1)^2 - 2 \times (\beta^2 - \alpha^2)\right\}\\ &+ \frac{b}{1} \times \left\{1^1 - (-1)^1 - 2 \times (\beta^1 - \alpha^1)\right\}\end{aligned}$$

ここで，a，b が消えるような，α，β を求めると[*2]，$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ と $\beta = \dfrac{1}{2}$ が求まり，この値を代入すると，a，b の関係している部分が 0 になって消え，残るのは先頭の $\dfrac{1}{3}$ に関する部分だけで

$$\frac{1}{3} \times (1 + 1 - 2 \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

となります。

以上のことをまとめると，$-1 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ である任意の α，β と，任意の a，b に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx &= \int_{-1}^{\alpha} |f(x)|\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx + \int_{\beta}^{1} |f(x)|\,dx\\ &\geqq \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \geqq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成立し，等号は $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ と $\beta = \dfrac{1}{2}$ とするとき，$-1 \leqq x \leqq \alpha$ で $f(x) \geqq 0$，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ で $f(x) \leqq 0$，$\beta \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$ と符号が変化するときである。

つまり，$f(x) = x^2 - \dfrac{1}{4}$ のときだけ成立し，このときは x 軸と異なる 2 点で交わり，それらの交点が 2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ の間にあることもわかります。(証明終わり)

これが，安田先生の本 [1] で紹介されていた方法ですが，その中では，もっと読みやすく書かれていますので，ぜひ，実際にこの本をご覧下さい，

次に，$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ と $\beta = \cos\dfrac{\pi}{3}$ となっていることに注意し，定積分の最小値の問題として，3 次式の場合に，拡張してみましょう。

[*1] 一般化ができるように，わざと完全には計算をしない形で表示させています。

[*2] このような α，β が存在することが，この証明のキーポイントです。

2 3次式の場合への拡張

3次の場合だと，任意の実数 a，b，c に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x^3+ax^2+bx+c|\,dx \geqq \frac{1}{4}$ が言えそうです。

(証明) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx$，$\alpha_1=\cos\dfrac{\pi}{4}$ ，$\alpha_2=\cos\dfrac{2\pi}{4}$，$\alpha_3=\cos\dfrac{3\pi}{4}$ とすると，(表示が面倒なので，積分区間と符号だけ書いています。)

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \geqq -\int_{-1}^{\alpha_3}+\int_{\alpha_3}^{\alpha_2}-\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{1}$$

また，右辺の被積分関数は，$|f(x)|$ じゃなくて，すべて $f(x)$ の積分です。この右辺を $F(x)$ で表すと，[*3]

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \geqq F(1)+{}^{*4}F(-1)-2\times\{F(\alpha_1)-F(\alpha_2)+F(\alpha_3)\}$$

となり，さらに整理すると，次のようになります。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\times\left\{1^4+(-1)^4-2\times(\alpha_1^4-\alpha_2^4+\alpha_3^4)\right\}\\
&+\frac{a}{3}\times\left\{1^3+(-1)^3-2\times(\alpha_1^3-\alpha_2^3+\alpha_3^3)\right\}\\
&+\frac{b}{2}\times\left\{1^2+(-1)^2-2\times(\alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2)\right\}\\
&+\frac{c}{1}\times\left\{1^1+(-1)^1-2\times(\alpha_1^1-\alpha_2^1+\alpha_3^1)\right\}
\end{aligned}$$

ここで，この式に α_1，α_2，α_3 の値を代入すると，a，b，c の関係している部分が 0 になって消えてしまいます。残るのは，$\dfrac{1}{4}$ に関する部分だけで $\dfrac{1}{4}\times(1+1-2\times\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$ が求まります。このあたりまでは，具体的に α_1 の値などが求まってしまうので，わりと簡単に最小値がだせましたが，次数が上がっていくとちょっと面倒です。

3 チェビシェフの多項式と三角関数の不思議な等式 (その 1)

次数が上がっていっても出てくる式は，$1^k\pm(-1)^k-2\times(\alpha_1^k-\alpha_2^k+\alpha_3^k-\alpha_4^k+\cdots)$ の形[*5]ばかりです。このことをふまえて一般的に証明するのに必要なものを準備します。

まず，チェビシェフの多項式を簡単にまとめておきます。

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta&=2(\cos\theta)^2-1\\
\cos 3\theta&=4(\cos\theta)^3-3(\cos\theta)\\
\cos 4\theta&=8(\cos\theta)^4-8(\cos\theta)^2+1\\
\cos 5\theta&=16(\cos\theta)^5-20(\cos\theta)^3+5(\cos\theta)
\end{aligned}$$

[*3] 少し計算して

[*4] 今度はプラスです。(符号を $-+-+$ と変化させているためです。)

[*5] 2 項目の係数がマイナスのときもあるので $\pm$ となる。

のように，$\cos n\theta$ は，$\cos\theta$ の多項式として表示され，右辺を $\cos\theta$ の多項式と見て第 1 種のチェビシェフ多項式と呼びますが，最初のいくつかを具体的に書いておきます。

$T_0(x)=1$ と $T_1(x)=x$ も追加し，$T_2(x)=2x^2-1$，$T_3(x)=4x^3-3x$，$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$，$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$ となっています。$T_n(x)=2x\times T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$ という漸化式もすぐ得られます。

補題 1 (チェビシェフ多項式の性質)
① $T_n(x)$ の最高次の係数は，2^{n-1} である。
② $T_{2n}(x)$ は，偶関数であり，$T_{2n-1}(x)$ は，奇関数となります。

証明は，$T_n(x)=2x\times T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$ を使えば，すぐ得られます。

補題 2 ① $\cos^{2k}\theta=A_0+A_1\cdot\cos(2\theta)+A_2\cdot\cos(4\theta)+\cdots+A_k\cdot\cos(2k\theta)$ と表示できて，$A_k=\dfrac{1}{2^{2k-1}}$ と $A_0+A_1+\cdots+A_{k-1}=1-\dfrac{1}{2^{2k-1}}$ が成立します。
② $\cos^{2k+1}\theta=A_0\cdot\cos(\theta)+A_1\cdot\cos(3\theta)\cdots+A_k\cdot\cos\{(2k+1)\theta\}$ と表示できて，$A_k=\dfrac{1}{2^{2k}}$ と $A_0+A_1+\cdots+A_{k-1}=1-\dfrac{1}{2^{2k}}$ が成立します。

証明は，補題 1 を使えばすぐ示すことができます。$A_0+A_1+\cdots+A_{k-1}$ に関することは，$\theta=0$ を代入して $A_0+A_1+\cdots+A_k=1$ からわかります。

補題 3 (ある自然数 k を取ってきて固定しておきます。)
$\theta=\dfrac{\pi}{2k}$ で，m を $0\leqq m\leqq k-1$ の整数とするとき

① $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2m)j\theta\}=1$

② $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2m+1)j\theta\}=0$

③ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2k)j\theta\}=-2k+1$

④ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos^{2m}(j\theta)=1$

⑤ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos^{2m+1}(j\theta)=0$

⑥ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}\times\cos^{2k}(j\theta)=1-\frac{2k}{2^{2k-1}}$

(①の証明) i を，虚数単位として，$\theta=\dfrac{\pi}{2k}$ なので $\zeta=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$ とおくと $\zeta^{2k}=-1$ に注意して，

$$\zeta^{2m}-\zeta^{4m}+\cdots+\zeta^{2m(2k-1)}=\frac{\zeta^{2m}\left\{(-\zeta^{2m})^{2k-1}-1\right\}}{(-\zeta^{2m})-1}=\frac{-(\zeta^{2m})^{2k}-\zeta^{2m}}{-\zeta^{2m}-1}$$

$$= \frac{-(\zeta^{2k})^{2m} - \zeta^{2m}}{-\zeta^{2m} - 1} = \frac{-1 - \zeta^{2m}}{-\zeta^{2m} - 1} = 1$$

となることから，両辺の実数部分を比較すると①の等式が得られます。

(②の証明) ②の式の左辺は,

$$\cos\{(2m+1)\theta\} - \cos\{2(2m+1)\theta\} + \cdots + (-1)^{k-1} \times \cos\{k(2m+1)\theta\} + \cdots$$
$$- \cos\{(2k-2)(2m+1)\theta\} + \cos\{(2k-1)(2m+1)\theta\}$$

のようになっていますが，ちょうど真ん中になる $+(-1)^{k-1} \times \cos\{k(2m+1)\theta\}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{2k}$ なので 0 になります。残りの項は，逆順に並べたものとの和を考えると 2 つづつ消えていきます。つまり,

$$\cos\{(2m+1)\theta\} + \cos\{(2k-1)(2m+1)\theta\} = 0$$
$$- \cos\{2(2m+1)\theta\} - \cos\{(2k-2)(2m+1)\theta\} = 0$$
$$\cdots$$

理由は,

$$(2m+1)\theta + (2k-1)(2m+1)\theta = 2k(2m+1)\theta = (2m+1)\pi$$
$$2(2m+1)\theta + (2k-2)(2m+1)\theta = 2k(2m+1)\theta = (2m+1)\pi$$
$$\cdots$$

というように角度の和が π の奇数倍になっているので，和 $\cos(\ ) + \cos(\ )$ が 0 になります。

(③の証明) ③の式の左辺を考えると $\theta = \dfrac{\pi}{2k}$ なので

$$(-1)^{j-1} \times \cos\{(2k)j\theta\} = (-1)^{j-1} \times \cos(j\pi) = (-1)^{j-1} \times (-1)^{j} = (-1)^{2j-1} = -1$$

というように各項がすべて -1 となり，それが $2k-1$ 個でてくるので $(-1) \times (2k-1) = -2k+1$ となります。

(④の証明) 補題 2 から cos の偶数乗は，角度の偶数倍で表示できます。つまり

$$\cos^{2m}(j\theta) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2j\theta) + A_2 \cdot \cos(4j\theta) + \cdots + A_m \cdot \cos(2mj\theta)$$

と書けますが，この両辺に $(-1)^{j-1}$ をかけて $\sum_{j=1}^{2k-1}$ を考えると補題 3 の①から $A_0 \times 1 + A_1 \times 1 + A_2 \times 1 + \cdots + A_m \times 1$ のように各係数がすべて 1 となり，さらに補題 2 の①で示しているように $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_m = 1$ も成立するので補題 3 の④が成立することがわかります。

(⑤の証明) 補題 2 から cos の奇数乗は，角度の奇数倍で表示できるので，ほとんど同様に考えてます。補題 3 の⑤が成立することがわかります。

(⑥の証明) 補題 3 の④と同じ様にやるのですが,

$$\cos^{2k}(j\theta) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2j\theta) + A_2 \cdot \cos(4j\theta) + \cdots + A_k \cdot \cos(2kj\theta)$$

この両辺に $(-1)^{j-1}$ をかけて $\sum_{j=1}^{2k-1}$ を考える訳ですが，補題 2 の① と 補題 3 の③ で示しているように，$A_k = \dfrac{1}{2^{2k-1}}$ と $A_0 + A_1 + \cdots + A_{k-1} = 1 - \dfrac{1}{2^{2k-1}}$ になることと，$\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1} \times$

$\cos\{(2k)j\theta\} = -2k+1$ に注意すれば，$\dfrac{1}{2^{2k-1}} \times (-2k+1) + \left(1 - \dfrac{1}{2^{2k-1}}\right) = 1 - \dfrac{2k}{2^{2k-1}}$ になります。

4　三角関数の不思議な等式 (その 1) の実験例

補題 3 の①〜③は，よく出てきてもおかしくないような等式ですが，補題 3 の④〜⑥は，あまり見かけないような気がします。これって有名な等式なのでしょうか？

例えば④の公式で $k=5$，$m=2$ とでも置くと $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ で

$$\cos^4\frac{\pi}{10} - \cos^4\frac{2\pi}{10} + \cos^4\frac{3\pi}{10} - \cos^4\frac{4\pi}{10} + \cos^4\frac{5\pi}{10} - \cos^4\frac{6\pi}{10} + \cos^4\frac{7\pi}{10} - \cos^4\frac{8\pi}{10} + \cos^4\frac{9\pi}{10} = 1$$

という等式ですが，これは，大学入試に出題されたらどうやって示すと楽なのでしょうか？

⑤の公式で $k=5$，$m=3$ と置くと $\theta = \dfrac{\pi}{10}$，$2m+1=7$ で

$$\cos^7\frac{\pi}{10} - \cos^7\frac{2\pi}{10} + \cos^7\frac{3\pi}{10} - \cos^7\frac{4\pi}{10} + \cos^7\frac{5\pi}{10} - \cos^7\frac{6\pi}{10} + \cos^7\frac{7\pi}{10} - \cos^7\frac{8\pi}{10} + \cos^7\frac{9\pi}{10} = 0$$

となりますが，これは当たり前すぎる等式なので面白くないです。

⑥の公式で $k=5$ と置くと $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ で

$$\cos^{10}\frac{\pi}{10} - \cos^{10}\frac{2\pi}{10} + \cos^{10}\frac{3\pi}{10} - \cos^{10}\frac{4\pi}{10} + \cos^{10}\frac{5\pi}{10} - \cos^{10}\frac{6\pi}{10} + \cos^{10}\frac{7\pi}{10} - \cos^{10}\frac{8\pi}{10} + \cos^{10}\frac{9\pi}{10} = 1 - \frac{10}{2^9} = 0.980468\cdots$$

となります。これは結構不思議な等式です。

5　三角関数の不思議な等式 (その 2) と実験例

補題 4 (ある自然数 k を取ってきて固定しておきます。)

$\theta=\dfrac{\pi}{2k+1}$ で，m を，$0 \leqq m \leqq k-1$ の整数とするとき

① $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2m)j\theta\}=0$

② $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2m+1)j\theta\}=1$

③ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos\{(2k+1)j\theta\}=-2k$

④ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos^{2m}(j\theta)=0$

⑤ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos^{2m+1}(j\theta)=1$

⑥ $\displaystyle\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j-1}\times\cos^{2k+1}(j\theta)=1-\frac{2k+1}{2^{2k}}$

証明は，補題 3 とほとんど同じなので省略します。

(参考) 証明は省略しましたが，補題 4 の④〜⑥を，数値実験してみます。

例えば④の公式で $k=3$，$m=2$ とでも置くと $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ で

$$\cos^4\frac{\pi}{7}-\cos^4\frac{2\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}-\cos^4\frac{4\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}-\cos^4\frac{6\pi}{7}=0$$

となりますが，これは，当たり前の等式です。

次に，⑤の公式で $k=3$，$m=2$ と置くと $\theta=\dfrac{\pi}{7}$，$2m+1=5$ で

$$\cos^5\frac{\pi}{7}-\cos^5\frac{2\pi}{7}+\cos^5\frac{3\pi}{7}-\cos^5\frac{4\pi}{7}+\cos^5\frac{5\pi}{7}-\cos^5\frac{6\pi}{7}=1$$

となりますが，これは，少し不思議な等式です。5 乗じゃなくて 1 乗だったら大学入試の問題として，よくみかけます。

また，⑥の公式で $k=3$ と置くと $\theta=\dfrac{\pi}{7}$，$2k+1=7$ で

$$\cos^7\frac{\pi}{7}-\cos^7\frac{2\pi}{7}+\cos^7\frac{3\pi}{7}-\cos^7\frac{4\pi}{7}+\cos^7\frac{5\pi}{7}-\cos^7\frac{6\pi}{7}=1-\frac{1}{2^6}=0.890625\cdots$$

これは，本当に不思議な等式ですね。こんな公式を自分で見つけることができたので，安田先生には大感謝です。

補題 3 の⑥と補題 4 の⑥は，1 つにまとめることができ，

$\theta=\dfrac{\pi}{k}$ とするとき $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\times\cos^{k}(j\theta)=1-\frac{k}{2^{k-1}}$

となります。こうやってながめてみると簡単な証明もありそうですが，今はこういった等式を発見することができただけで満足です。

実験はこれぐらいにして，定積分の値を評価することにもどります。

6　定積分の最小値

定理 ① $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left| x^{2k} + ax^{2k-1} + \cdots \right| dx \geqq \frac{1}{2^{2k-1}}$

② $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left| x^{2k-1} + \cdots \right| dx \geqq \frac{1}{2^{2k-2}}$

(①の証明) $\theta = \dfrac{\pi}{2k+1}$ で，m を $0 \leqq m \leqq k-1$ の整数とします。$\alpha_j = \cos(j\theta)$ ($j = 1$，2，3，$\cdots$，$2k$) という $2k$ 個の値を考えて，積分の区間をこの値で分割します。すると安田先生の方法から

$$\int_{1}^{-1} |f(x)|\, dx \geqq F(1) - {}^{*6}F(-1) - 2 \times \{F(\alpha_1) - F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots\}$$

という評価が得られます。この不等式の右側を具体的に計算すると。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2k+1} \times \left\{1^{2k+1} - (-1)^{2k+1} - 2 \times (\alpha_1^{2k+1} - \alpha_2^{2k+1} + \alpha_3^{2k+1} - \cdots)\right\} + \\ &\frac{a}{2k} \times \left\{1^{2k} - (-1)^{2k} - 2 \times (\alpha_1^{2k} - \alpha_2^{2k} + \alpha_3^{2k} - \cdots)\right\} + \\ &\frac{b}{2k-1} \times \left\{1^{2k-1} - (-1)^{2k-1} - 2 \times (\alpha_1^{2k-1} - \alpha_2^{2k-1} + \alpha_3^{2k-1} - \cdots)\right\} + \cdots\end{aligned}$$

のようになる訳ですが，文字 a，b，$c\cdots$ がついてくるところは，補題 4 の④と⑤を使うとすべて消えてしまいます。残るのは，

$$\frac{1}{2k+1} \times \left\{1^{2k+1} - (-1)^{2k+1} - 2 \times (\alpha_1^{2k+1} - \alpha_2^{2k+1} + \alpha_3^{2k+1} - \cdots)\right\}$$

だけで，これを補題 4 の⑥を使って計算すると，

$$\frac{1}{2k+1} \times \left\{1 - (-1) - 2 \times \left(1 - \frac{2k+1}{2^{2k}}\right)\right\} = \frac{1}{2^{2k-1}}$$

が出てきます。

(②の証明)

$\theta = \dfrac{\pi}{2k}$ で，m を $0 \leqq m \leqq k-1$ の整数とします。

$\alpha_j = \cos(j\theta)$ ($j = 1$，2，3，$\cdots$，$2k-1$) という $2k-1$ 個の値を考えて，積分の区間をこの値で分割します。すると

*6 この場合はマイナスです。

$$\int_1^{-1} |f(x)|\,dx \geqq F(1) + {}^{*7}F(-1) - 2 \times \{F(\alpha_1) - F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots\}$$

という評価が得られて，後は同様にして，文字 a，b，c，$\cdots$ がついてくるところは，補題 3 の④と⑤を使うと消えてしまい，残った

$$\frac{1}{2k} \times \left\{1^{2k} + (-1)^{2k} - 2 \times (\alpha_1^{2k} - \alpha_2^{2k} + \alpha_3^{2k} - \cdots)\right\}$$

を補題 3 の⑥を使って計算すると，

$$\frac{1}{2k} \times \left\{1 + 1 - 2 \times \left(1 - \frac{2k}{2^{2k-1}}\right)\right\} = \frac{1}{2^{2k-2}}$$

が出てきます。これで証明が完了です。

参考文献

[1] 安田亨,「入試数学 伝説の良問 100」，講談社ブルーバックス，2003 年

[*7] 今度はプラスです。