

平成23年度 センター試験 (本試 平成23年1月16日実施)

数学I・数学A (60分, 100点 全問必答)

第1問 (配点 20)

(1) $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ とすると $\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$,
 $\frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$, $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$
 である。このとき, 不等式 $|2abx - a^2| < b^2$ を満たす x の値の範囲は
 $\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ となる。

(2) 実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める。

$$p: (a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$$

$$q: |a+b| < 1 \text{ または } |a-2b| < 2$$

(1) 次の ①～③のうち, 命題「 $q \Rightarrow p$ 」に対する反例になっているのは $\boxed{\text{チ}}$ である。

① $a = 0, b = 0$ ② $a = 1, b = 0$ ③ $a = 0, b = 1$ ④ $a = 1, b = 1$

(2) 命題「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は「 $\boxed{\text{ツ}} \Rightarrow \boxed{\text{テ}}$ 」である。 $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを, 次の ①～⑦のうちから一つずつ選べ。

① $|a+b| < 1$ かつ $|a-2b| < 2$ ② $(a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$

③ $|a+b| < 1$ または $|a-2b| < 2$ ④ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \leq 5$

⑤ $|a+b| \geq 1$ かつ $|a-2b| \geq 2$ ⑥ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 > 5$

⑦ $|a+b| \geq 1$ または $|a-2b| \geq 2$ ⑧ $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5$

(3) p は q であるための $\boxed{\text{ト}}$ 。 $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを, 次の ①～③のうちから一つ選べ。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが, 十分条件ではない

③ 十分条件であるが, 必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

第2問 (配点 25)

a, b, c を定数とし, $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x の2次関数 $y = ax^2 + bx + c \dots \textcircled{1}$ のグラフを G とする。 G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき $a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \dots \textcircled{2}$ となる。さらに, G が点

$(1, 2b-1)$ を通るとき $c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \dots \textcircled{3}$ が成り立つ。以下, ②, ③のとき, 2次関数①とそのグラフ G を考える。

(1) G と x 軸が異なる2点で交わるような b の値の範囲は $b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$, $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$ である。さらに, G と x 軸の正の部分が異なる2点で交わるような b の値の範囲は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(2) $b > 0$ とする。 $0 \leq x \leq b$ における 2 次関数①の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき、 $b = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ である。

一方、 $x \geq b$ における 2 次関数①の最大値が 3 であるとき、 $b = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ である。

$b = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$, $b = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ のときの①のグラフをそれぞれ G_1 , G_2 とする。 G_1 を x 軸方向に テ , y 軸方向に ト だけ平行移動すれば、 G_2 と一致する。

第 3 問 (配点 30)

点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A, B, C, D がこの順にある。四角形 $ABCD$ の辺の長さは、それぞれ $AB = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{7}$, $CD = \sqrt{3}$, $DA = 2\sqrt{3}$ であるとする。

(1) $\angle ABC = \theta$, $AC = x$ とおくと、 $\triangle ABC$ に着目して $x^2 = \text{アイ} - 28 \cos \theta$ となる。また、 $\triangle ACD$

に着目して $x^2 = 15 + \text{ウエ} \cos \theta$ となる。よって、 $\cos \theta = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$, $x = \sqrt{\text{キク}}$ であり、

円 O の半径は $\sqrt{\text{ケ}}$ である。また、四角形 $ABCD$ の面積は $\text{コ} \sqrt{\text{サ}}$ である。

(2) 点 A における円 O の接線と点 D における円 O の接線の交点を E とすると、 $\angle OAE = \text{シス}^\circ$ である。また、線分 OE と辺 AD の交点を F とすると、 $\angle AFE = \text{セソ}^\circ$ であり、 $OF \cdot OE = \text{タ}$ である。さらに、辺 AD の延長と線分 OC の延長の交点を G とする。点 E から直線 OG に垂線を下ろし、直線 OG との交点を H とする。4 点 $E, G, \text{チ}$ は同一円周上にある。 チ に当てはまるものを次の ① ~ ④ から一つ選べ。

- ① C, F ② H, D ③ H, F ④ H, A ⑤ O, A

したがって $OH \cdot OG = \text{ツ}$ である。

第 4 問 (配点 25)

1 個のさいころを投げるとき、4 以下の目が出る確率 p は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ であり、5 以上の目が出る確率 q

は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。以下では、1 個のさいころを 8 回繰り返して投げる。

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $\text{オカ} p^3 q^5$ である。第 1 回目に 4 以下の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は $\text{キク} p^3 q^5$ である。第 1 回目に 5 以上の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $\text{ケコ} p^3 q^5$ である。

(2) 次の ① ~ ⑦ のうち オカ に等しいものは サ と シ である。ただし、 サ と シ は解答の順序を問わない。

- ① $7C_2 \times 7C_3$ ② $8C_1 \times 8C_2$ ③ $7C_2 + 7C_3$ ④ $8C_1 + 8C_2$
 ⑤ $7C_4 \times 7C_5$ ⑥ $8C_6 \times 8C_7$ ⑦ $7C_4 + 7C_5$ ⑧ $8C_6 + 8C_7$

(3) 得点を次のように定める。8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出た場合、 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ について、第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき、得点は n 点とする。また、4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とならないときは、得点を 0 点とする。このとき、得点が 6 点となる確率は $p \text{ス} q \text{セ}$

であり、得点が3点となる確率は $\frac{\text{ソタ}}{p} \frac{\text{ス}}{q} \frac{\text{セ}}{\text{トナニ}}$ である。また、得点の期待値は $\frac{\text{チツテ}}{\text{トナニ}}$ である。

数学II・数学B (60分, 100点)

第1問 (必答問題) (配点 30)

(1) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のとき、関数 $y = \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta$ の最小値を求めよう。

$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とおくと $t^2 = \text{ア} \cos^2 \theta + \text{イ} \sqrt{\text{ウ}} \sin \theta \cos \theta + \text{エ}$ で

あるから $y = t^2 - \text{オ} t - \text{カ}$ となる。また $t = \text{キ} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\text{ク}} \right)$ である。

$\theta + \frac{\pi}{\text{ク}}$ のとり得る値の範囲は $-\frac{\pi}{\text{ケ}} \leq \theta + \frac{\pi}{\text{ク}} \leq \frac{\pi}{\text{ク}}$ であるから、 t の

とり得る値の範囲は $\text{コサ} \leq t \leq \sqrt{\text{シ}}$ である。したがって、 y は $t = \text{ス}$ 、すなわち $\theta = -\frac{\pi}{\text{セ}}$ のとき、最小値 ソタ をとる。

(2) 自然数 x で、条件 $12(\log_2 \sqrt{x})^2 - 7 \log_4 x - 10 > 0 \cdots \text{①}$ $x + \log_3 x < 14 \cdots \text{②}$ を満たすものを求めよう。まず、 x を正の実数として、条件①を考える。①は $X = \log_2 x$ とおくと $6X^2 - \text{チ} X -$

$\text{ツテ} > 0$ となる。この2次不等式を解くと $X < -\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$, $\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}} < X$ となる。した

がって、条件①を満たす最小の自然数 x は ネ であり、 ネ 以上のすべての自然数 x は①を満たす。

次に、条件②について考えると、②を満たす最大の自然数 x は ノハ であり、 ノハ 以下のすべての自然数 x は②を満たす。したがって、求める x は ネ 以上 ノハ 以下の自然数である。

第2問 (必答問題) (配点 30)

座標平面上で、放物線 $y = x^2$ を C とする。曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における C の接線 l の方程式は $y = \text{アイ} x - a \text{ウ}$ である。 $a \neq 0$ のとき直線 l が x 軸と交わる点を Q とすると、 Q の座標は $\left(\frac{\text{エ}}{\text{オ}}, \text{カ} \right)$ である。 $a > 0$ のとき、曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた

図形の面積を S とすると $S = \frac{a \text{キ}}{\text{クケ}}$ である。 $a < 2$ のとき、曲線 C と直線 l および直線 $x = 2$ で囲

まれた図形の面積を T とすると $T = -\frac{a^3}{\text{コ}} + \text{サ} a^2 - \text{シ} a + \frac{\text{ス}}{\text{セ}}$ である。

$a = 0$ のときは $S = 0$, $a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして、 $0 \leq a \leq 2$ に対して $U = S + T$ とお

く。 a がこの範囲を動くとき、 U は $a = \text{ソ}$ で最大値 $\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$ をとり、 $a = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ で最小値

$\frac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$ をとる。

第3問 (選択問題) (配点 20)

数直線上で点Pに実数 a が対応しているとき、 a を点Pの座標といい、座標が a である点Pを $P(a)$ で表す。数直線上に点 $P_1(1), P_2(2)$ をとる。線分 P_1P_2 を $3:1$ に内分する点を P_3 とする。一般に、自然数 n に対して、線分 P_nP_{n+1} を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とする。点 P_n の座標を x_n とする。 $x_1 = 1, x_2 = 2$ であり、

$$x_3 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ である。数列 } \{x_n\} \text{ の一般項を求めるために、この数列の階差数列を考えよう。自然数 } n \text{ に対$$

して $y_n = x_{n+1} - x_n$ とする。 $y_1 = \boxed{\text{ウ}}$, $y_{n+1} = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} y_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ である。したがって、

$$y_n = \left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{\boxed{\text{キ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ であり, } x_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}} \left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{\boxed{\text{サ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。ただし、 $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{サ}}$ については、当てはまるものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $n - 1$ ② n ③ $n + 1$ ④ $n + 2$

次に、自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^n k |y_k|$ を求めよう。 $r = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ とおくと、 $S_n - rS_n =$

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} - nr^{\boxed{\text{シ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ であり, したがって } S_n = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}} \right)^{\boxed{\text{ツ}}} \right\} -$$

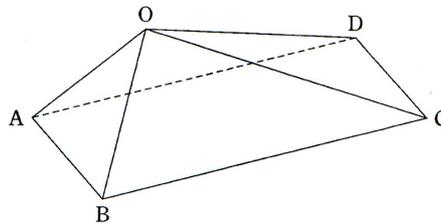
$\frac{n}{\boxed{\text{テ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}} \right)^{\boxed{\text{ナ}}}$ となる。ただし、 $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ については、

当てはまるものを、次の①～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $n - 1$ ② n ③ $n + 1$ ④ $n + 2$

第4問 (選択問題) (配点 20)

四角錐 $OABCD$ において、三角形 OBC と三角形 OAD は合同で、 $OB=1, BC=2, OC=\sqrt{3}$ であり、底面の四角形 $ABCD$ は長方形である。 $AB=2r$ とおき、 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とおく。



\vec{OD} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと \vec{OD} を $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} - \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{b} + \vec{c}$ である。辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると $\vec{AL} = -\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{a} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{b} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{c}$ となる。さらに辺 OB の中点を M , 3点 A, L, M の定める平面を α とし、平面 α と辺 OC との交点を N とする。点 N は平面 α 上にあることか

ら、 \vec{AN} は実数 s, t を用いて $\vec{AN} = s\vec{AL} + t\vec{AM}$ と表せるので $\vec{ON} = \left(\begin{array}{c} \text{キ} \\ \text{ケ} \end{array} s - t \right) \vec{a} + \left(-\frac{s}{\text{コ}} + \frac{t}{\text{サ}} \right) \vec{b} + \frac{s}{\text{シ}} \vec{c}$ となる。一方、点 N は辺 OC 上にもある。これから、 $\vec{ON} = \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \vec{c}$ となる。

また、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{ソ} - \text{タ} r^2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \text{チ}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \text{ツテ} r^2$ である。よって、 $\vec{AM} \cdot \vec{MN}$ を計算すると、 $AB = \sqrt{\text{ト}}$ のとき、直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる。

第5問 (選択問題) (配点 20)

次の表は、3回行われた50点満点のゲームの得点をまとめたものである。1回戦のゲームに15人の選手が参加し、そのうち得点が上位の10人が2回戦のゲームに参加した。さらに、2回戦のゲームで得点が上位の4人が3回戦のゲームに参加した。表中の「-」は、そのゲームに参加しなかったことを表している。また、表中の「範囲」は、得点の最大の値から最小の値を引いた差である。なお、ゲームの得点は整数値をとるものとする。

番号	1回戦(点)	2回戦(点)	3回戦(点)
1	33	37	-
2	44	44	D
3	30	34	-
4	38	35	-
5	29	30	-
6	26	-	-
7	43	41	43
8	23	-	-
9	28	-	-
10	34	38	E
11	33	33	-
12	26	-	-
13	36	41	F
14	30	37	-
15	27	-	-
平均値	A	37.0	43.0
範囲	21	14	7
分散	35.60	B	6.50
標準偏差	6.0	C	2.5

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで①にマークすること。

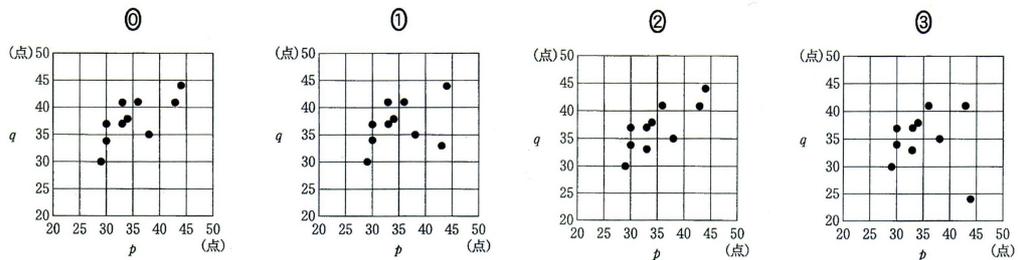
- (1) 1回戦のゲームに参加した15人の得点の平均値 A は $\text{アイ} . \text{ウ}$ 点である。そのうち、得点が上位の10人の得点の平均値を A_1 、得点が下位の5人の得点の平均値を A_2 とすると、 A_1, A_2, A の間には関係式 $\frac{\text{エ}}{\text{オ}} A_1 + \frac{\text{カ}}{\text{キ}} A_2 = A$ が成り立つ。ただし、 $\frac{\text{エ}}{\text{オ}} + \frac{\text{カ}}{\text{キ}} = 1$ とする。
- (2) 2回戦のゲームに参加した10人の2回戦のゲームの得点について、平均値37.0点からの偏差の最大値は $\text{ク} . \text{ケ}$ 点である。また、分散 B の値は $\text{コサ} . \text{シス}$ 、標準偏差 C の値は $\text{セ} . \text{ソ}$ 点である。

- (3) 3回戦のゲームの得点について、大小関係 $F < E < 43 < D$ が成り立っている。D, E, F の値から平均値 43.0 点を引いた整数値を、それぞれ x, y, z とおくと、3回戦のゲームの得点の平均値が 43.0 点、範囲が 7 点、分散が 6.50 であることから、次の式が成り立つ。 $x + y + z =$ $x - z =$

$x^2 + y^2 + z^2 =$ 上の連立方程式と条件 $z < y < 0 < x$ により x, y, z の値が求まり、D,

E, F の値がそれぞれ 点、 点、 点であることがわかる。

- (4) 2回戦のゲームに参加した 10 人について、1回戦のゲームの得点を変数 p , 2回戦のゲームの得点を変数 q で表す。このとき、変数 p と変数 q の相関図 (散布図) として適切なものは であり、変数 p と変数 q の間には 。 に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。



に最も適当なものを、次の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。

- ① 正の相関関係がある ② 相関関係はほとんどない ③ 負の相関関係がある

- (5) 2回戦のゲームに参加した 10 人について、(4) での変数 p, q を使って、得点の変化率を表す新しい変数 r を、 $r = \frac{q-p}{p} \times 100(\%)$ で定め、次の度数分布表を作成した。

階級 (%)		人数 (人)
以上	未満	
-10 ~ 0		2
0 ~ 10		G
10 ~ 20		H
20 ~ 30		1

表中の G の値は , H の値は である。

第 6 問 (選択問題) (配点 20)

n を 2 以上の自然数とし、以下の操作を考える。

- (i) n が偶数ならば、 n を 2 で割る。
 (ii) n が奇数ならば、 n を 3 倍して 1 を加える。

与えられた 2 以上の自然数にこの操作を行い、得られた自然数が 1 でなければ、得られた自然数にこの操作を繰り返す。2 以上 10^5 以下の自然数から始めると、この操作を何回か繰り返すことで必ず 1 が得られることが確かめられている。たとえば、10 から始めると $10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ である。ただし、 $a \rightarrow b$ は 1 回の操作で自然数 a から自然数 b が得られたことを意味する。 N を 2 以上 10^5 以下の自然数とすると、 $F(N)$ を N から始めて 1 が得られるまでの上記の操作の回数と定義する。また、 $F(1) = 0$ とおく。たとえば、上の例から、 $F(10) = 6$ である。

- (1) $F(6) =$, $F(11) =$ である。
 (2) 10^5 以下の自然数 N について、 $F(N)$ を求めるため、次のような [プログラム] を作った。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

```
[プログラム]
100 INPUT N
110 LET I=N
```

