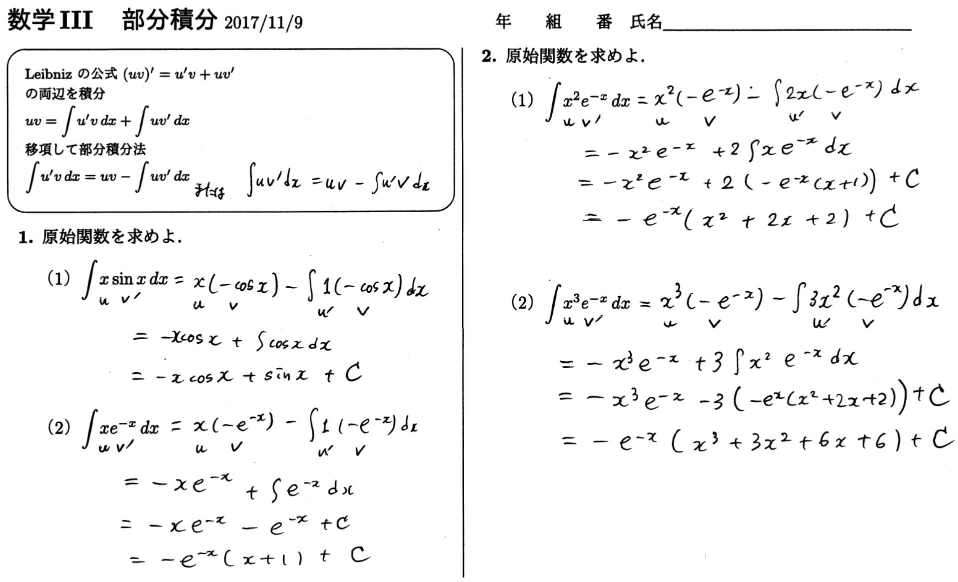
部分積分と階乗

市川工業高等学校　氏家 悟

1　部分積分

数学セミナー 7 月号 [1] を見ていたら，昔作った教材を思い出したので，紹介する。自分は日ごろ，数学を感覚的，体験的に捉えさせたいと考えている。2017 年，数学IIIの授業[1]で部分積分を扱ったときに，階乗の一般化であるガンマ関数を構成できると思い教材にした。



数学 III　部分積分 2017/11/9　　　年　組　番 氏名________

Leibniz の公式 $(uv)' = u'v + uv'$
の両辺を積分
$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$
移項して部分積分法
$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$ または $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

1. 原始関数を求めよ．

(1) $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\sin x}\,dx = \underset{u}{x}\,\underset{v}{(-\cos x)} - \int \underset{u'}{1}\,\underset{v}{(-\cos x)}\,dx$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

(2) $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^{-x}}\,dx = \underset{u}{x}\,\underset{v}{(-e^{-x})} - \int \underset{u'}{1}\,\underset{v}{(-e^{-x})}\,dx$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$= -e^{-x}(x+1) + C$

2. 原始関数を求めよ．

(1) $\int \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{e^{-x}}\,dx = \underset{u}{x^2}\,\underset{v}{(-e^{-x})} - \int \underset{u'}{2x}\,\underset{v}{(-e^{-x})}\,dx$

$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$

$= -x^2e^{-x} + 2(-e^{-x}(x+1)) + C$

$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

(2) $\int \underset{u}{x^3}\,\underset{v'}{e^{-x}}\,dx = \underset{u}{x^3}\,\underset{v}{(-e^{-x})} - \int \underset{u'}{3x^2}\,\underset{v}{(-e^{-x})}\,dx$

$= -x^3e^{-x} + 3\int x^2e^{-x}\,dx$

$= -x^3e^{-x} - 3(-e^{-x}(x^2+2x+2)) + C$

$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$

$-e^{-x}$ でくくられたカッコ内の定数は，1, 2, 6 でそれぞれ 1!, 2!, 3! になっている。

$$\int x^4e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) + C$$

となるので，

$$\int x^4e^{-x}\,dx = -e^{-x}({}_4\mathrm{P}_0x^4 + {}_4\mathrm{P}_1x^3 + {}_4\mathrm{P}_2x^2 + {}_4\mathrm{P}_3x + {}_4\mathrm{P}_4) + C$$

となり，${}_4\mathrm{P}_4 = 4!$ が現れる。部分積分にならないが，$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$ も

$$\int e^{-x}\,dx = \int x^0e^{-x}\,dx = -e^{-x}(0!) + C = -e^{-x} + C$$

と整合しているこの $n!$ が残るように極限 $x \to \infty$ をとればガンマ関数となる。

[1] 磯辺高校

最近の教科書を確認したら，部分積分の例題に

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1)+C$$

があった。

$$\int x^4e^x\,dx = e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)+C$$

も，符号が入れ替わる程度で階乗は出てくるが，極限 $x \to \infty$ は発散してしまう。

そもそも，テイラー展開などにも階乗が出てくるように，階乗は微積分とつながりが深く，それも教材にしたことがあった [2]。

2　多項式と指数の積の極限

その極限には，p を実数とし

$$x^pe^{-x} \to 0\ (x \to \infty)$$

が使われる。数学セミナーの連載 [1] では,「テイラーの公式で簡単に示せる。」とあったが，数学IIIなら二項展開で，これは等比数列の極限，$r>1$ のとき $r^n \to \infty$ の証明

$r = 1+h\ (h>0)$ で,

$$r^n = (1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3+\cdots$$

$nh \to \infty$ より，$r^n \to \infty$

に $\frac{1}{n}$（の累乗）をかけたもので証明できる。以下は $\frac{1}{n^2}$ をかけている。

$$\frac{r^n}{n^2} = \frac{(1+h)^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}+\frac{h}{n}+\frac{(1-\frac{1}{n})}{2}h^2+\frac{(1-\frac{1}{n})(n-2)}{6}h^2+\cdots$$

$\frac{(1-\frac{1}{n})(n-2)}{6}h^2 \to \infty$ より $\frac{r^n}{n^2} = \frac{1}{r^{-n}n^2} \to \infty$

これは n の累乗がどんなに大きくても指数が勝つ。したがって，その逆数 $\frac{n^p}{r^n} = n^pr^{-n}$ は累乗 p がどんなに大きくても，0 に収束する。したがって，$e>1$ より

$$x^pe^{-x} \to 0\ (x \to \infty)$$

実際，$\frac{n^{1000}}{1.001^n}$ では最初のほう $n=1,\ 2,\ 3$ のときは，$\frac{1}{1.001}$，$\frac{1.07\times10^{301}}{1.002001}$，$\frac{1.32\times10^{477}}{1.003003001}$ と多項式 n^{1000} が優勢だが，$n=1,000,500$ で 8.367×10^{5565} をピーク[2)] に，指数 1.001^n が優勢となり減少しはじめ，$n=20,000,000$ で $\frac{1.07\times10^{7301}}{3.54\times10^{8681}} = 3.02\times10^{-1381}$ になってしまう。

これは計算量の理論に出てくる「多項式時間」「指数関数時間」につながる話である。2000 年ごろに勤務した学校では，これらの証明を練習問題にしたことがあるが[3)]，2017 年のときは「多項式が寄ってたかっても指数には勝てない」程度で済ませた。

2) $\frac{1000500^{1000}}{1.001^{1000500}}-\frac{1000499^{1000}}{1.001^{1000499}} = 3.48\times10^{5556}>0$，$\frac{1000501^{1000}}{1.001^{1000501}}-\frac{1000500^{1000}}{1.001^{1000500}} = -4.88\times10^{5556}<0$

3) 東葛飾高校。「$r>1$ のとき $\frac{n^3}{r^n} \to 0$ を示せ」など

3　極限

「原始関数を求めて，その極限」くらいの話にわざわざ「広義積分」という語を持ち出すほどではないとは思ったが，調子に乗ってプリントに載せてしまった。

数学III　ガンマ関数 2017/11/21　　年　組　番　氏名________________

$(uv)' = u'v + uv'$ より $uv = \int u'v + \int uv'$

$\int u'v = uv - \int uv'$

広義積分 improper integral　　$(G'(x) = f(x))$

$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}[G(t)]_a^x$

$= \lim_{x\to\infty}(G(x) - G(a))$

指数の極限は，すべての多項式の極限より強いから，

$\lim_{x\to\infty} x^r e^{-x} = 0$　つまり　$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ より

1. 積分

(1) $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt$

$= \lim_{x\to\infty}[-e^{-t}]_0^x$

$= \lim_{x\to\infty}(-e^{-x} + e^0) = 0 + 1 = 1$

(2) $\int_0^\infty te^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x xe^{-t}\,dt$　$u' = e^{-t}$　$v = t$　$u = -e^{-t}$　$v' = 1$

$= \lim_{x\to\infty}[-te^{-t}]_0^x - \lim_{x\to\infty}\int_0^x(-e^{-t})dt$　つまり

$= 0 - (-1)$　(1)

$= 1$

(3) $\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x x^2e^{-t}\,dt$　$u' = e^{-t}$　$v = t^2$　$u = -e^{-t}$　$v' = 2t$

$= \lim_{x\to\infty}[-t^2e^{-t}]_0^x - \lim_{x\to\infty}\int_0^x 2t(-e^{-t})dt$

$= 0 + 2\lim_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt$

$= 2\times1 = 2$

(4) $\int_0^\infty t^3e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x x^3e^{-t}\,dt$　$u' = -e^{-t}$　$v = t^3$　$u = -e^{-t}$　$v' = 3t^2$

$= \lim_{x\to\infty}[-t^3e^{-t}]_0^x - \lim_{x\to\infty}\int_0^x 3t^2(-e^{-t})dt$

$= 0 + 3\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^2e^{-t}dt$

$= 3\times2 = 6$

2. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$\int_0^\infty t^ne^{-t}\,dt = n!$

と予想される．

定義（ガンマ関数）

$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$

3. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を証明せよ．

（証明）$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$ より，

$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^ne^{-t}\,dt$

$= \lim_{x\to\infty}\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$　$u' = e^{-t}$　$v = t^n$　$u = -e^{-t}$　$v' = nt^{n-1}$

$= \lim_{x\to\infty}[-t^ne^{-t}]_0^x - \lim_{x\to\infty}\int_0^x nt^{n-1}(-e^{-t})dt$

$= 0 + n\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$= n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$= n\Gamma(n)$

4. $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0e^{-t}\,dt = \boxed{1 = 0!}$

$\Gamma(2) = \int_0^\infty t^1e^{-t}\,dt = \boxed{1 = 1!}$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ より，$\Gamma(n+1) = \boxed{n!}$

極限を求める以外は，ただの部分積分の計算練習である。プリント右側，漸化式も部分積分の練習で証明でき，ガンマ関数が階乗を表す関数であることがわかる。

ガンマ関数の定義など，生徒に天下り的に示したところで無意味である。階乗の一般化が，簡単な部分積分の練習で構成できることを体験させたかったのである。

4　「余計な話」プリント

当時，授業の雑談にあたるものを「余計な話」プリントとして配布していた。[4]そこで，ガンマ関数の一般化を紹介した。

数学 III 余計な話（第 39 号）階乗の一般化 (1).docx	氏家悟	p.1

階乗の一般化

プリントで，

$\int_0^\infty t^0e^{-t}dt=1=0!$，$\int_0^\infty t^1e^{-t}dt=1=1!$，$\int_0^\infty t^2e^{-t}dt=2=2!$，$\int_0^\infty t^3e^{-t}dt=6=3!$ を計算し，一般に $n=1,2,3,\ldots$ に対し，$\int_0^\infty t^ne^{-t}dt=n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ から $\int_0^\infty t^ne^{-t}dt=n!$が成り立つことを確認した．

$\Gamma(n)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ は連続関数なので，n を自然数 $1,2,3,\ldots$ に限る必要はなく，n は実数どころか，複素数全体で定義される関数として，階乗が一般化される．

$\Gamma(n+1)=n!$ より，複素数 x に対し，

$$x!=\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^xe^{-t}dt$$ と定義する．

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ は微分可能なので，整級数（テイラー展開）から，任意の精度で数値計算できる．

数値を調べると次の通り．

0.1!	0.2!	0.3!	0.4!	0.5!	0.6!	0.7!	0.8!	0.9!	1!
0.95	0.92	0.90	0.89	0.89	0.89	0.91	0.93	0.96	1

一般に $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ より $x!=x(x-1)!$ であるから，

$1.4!=1.4\times0.4!=1.4\times0.89=1.24$ と計算される．したがって，$0.1!$ ～ $0.9!$ の値がわかれば，$1.1!$ ～ $1.9!$ の値が電卓でも計算できる．

0.4!	
0.89	
1.4!	×1.4
1.24	
2.4!	×2.4
2.98	

次の年も数学Ⅲを担当したが，授業プリントに取り上げることはせず，「余計な話」プリントでの紹介にとどめた。

今の学校でも，プリントにはしないが，いろいろ余計な話をして楽しむ。先日，1 年生の場合の数の授業で，階乗が出てきた。${}_4\mathrm{C}_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1$ と手順通り答えてくれたので，

「0! って何だと思う？」

「ゼロ」「ぜろ」

公式 ${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ にあてはめて ${}_4\mathrm{C}_4=\frac{4!}{4!(4-4)!}=\frac{4!}{4!0!}=1$ がうまくいくには

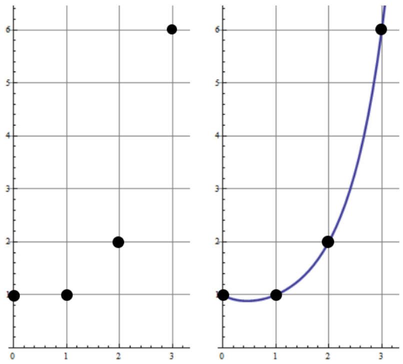
「0! は何？」「あ 1 だ。」

と何人か気づいてくれた。

「この公式が破綻しないために，$0!=1$ と決めます。これはルールです。」

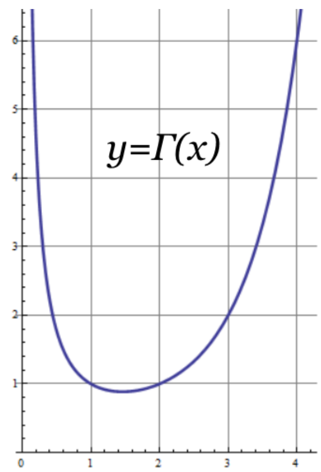
ついでに，点をプロットして滑らかに結んで見せた。

[4] 4 年前の定年の年，数学部会で発表した際，ほしい人に CD で配布した。



「2.5! は 3 くらいかな。電卓で計算してごらん。」
生徒は全員 iPad で授業を受けているので，
「$2.5! = 3.32$ くらい。」
「実は，$2.5! = 2.5 \times 1.5 \times 0.5!$ が成り立って。$0.5! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ とウィキペディアに出いていた。こんなところに円周率が出てくるんだね。」
元気な 1 年生，面白がってくれる。

3 年生は，積分を習っているので，
「$3.14! = 3.14 \times 2.14 \times 1.14 \times \int_0^\infty t^{0.14} e^{-t}\, dt$ なんだよ」
と見せると，
「0 から無限ですか！」
と，なかなか食いついてくれる。虚数も習っているので，
「この関数は複素数全体で定義されているんだよ。Google 電卓によれば $(3 + 0.1i)! = 5.94 + 0.75i$ だそうです。連続関数なので，$3! = 6$ に近い。」



$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

と定義されるガンマ関数なので，階乗を表すには

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

と 1 つずれている。なんとなく平行移動しているとは思っていたが，[1] に「定義域を $x > -1$ ではなく $x > 0$ にするため」とあって，あぁなるほどと思った。

またガンマ関数は，確率密度に使われるくらいに思っていたが，[1] には，「いろいろなところに顔を出す由緒正しいものである」と，有用な例が様々紹介されていた。それらも，いつか授業の雑談になりそうではある[5)]。

参考文献

[1] 植田好道，「積分による解析入門」, 数学セミナー，vol.64 no.7 765，2025 年 7 月.
[2] 氏家悟，「テイラー展開を導く教材 －体験する数学を目指して－」, α － ω，56 号，2018.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joy21ir5j-27#_27

5) それまで教員を続けていれば