3次方程式とその周辺の知識

東葛飾高等学校　川野哲嗣

1　はじめに

今年の $\alpha-\omega$ は私自身の備忘録として，研究授業の１つのネタになるようなものを，まとめてみようと考えました。恥ずかしながら，最近は私自身が研究授業をやらなくなってしまいましたが，教員 10 年目ぐらいまでは必要に迫られて研究授業を行っていて，準備が大変だったなと思っています。今まさに，という先生の助けになればと思います。

2　３次方程式の解法

【問題１】　3 次方程式 $x^3-3x^2+9x-14=0$ を解け。

【解答例 1-1】

因数定理より $(x-2)(x^2-x+7)=0$　したがって，$x=2,\ x=\dfrac{1\pm3\sqrt{3}i}{2}$

【解答例 1-2】

$x^3-3x^2+9x-14=(x-1)^3-3x+1+9x-14=(x-1)^3+6x-13=(x-1)^3+6(x-1)-7$

より，$x-1=X$ として，$X^3+6X-7=0$ を考える。

$X=u+v$ として，$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-7=0$ より，

$(u^3+v^3-7)+(u+v)(3uv+6)=0$

$u^3+v^3=7,\ uv=-2$ なる $u,\ v$ を考えることにして，

$u^3+v^3=7,\ u^3v^3=-8$ から $u^3,\ v^3$は解と係数の関係から $t^2-7t-8=0$ の解であって，

一般性を失わずに $u^3=8,\ v^3=-1$ として，$u=2,\ v=-1$

ここで $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ としておくと，$X=u+v$ とともに $X=u\omega+v\omega^2,\ u\omega^2+v\omega$ も解であることに注意して，

$X=1,\dfrac{-1\pm3\sqrt{3}i}{2}$ を得る。したがって，$x=2,\dfrac{1\pm3\sqrt{3}i}{2}$

【解答例 1-2】にある $x-1=X$ の変換，立方完成は 2 次の項を消去するための工夫になっているわけですが，3 次関数の極値などを見るときにも有用なものです。次の【問題２】を例に確認します。

3　３次関数の立方完成と極値

【問題２】　関数 $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ の $-\dfrac{7}{4}\leqq x\leqq 3$ での最小値と最大値を求めよ。
（東京大学 1991）

【解答例２】関数 $f(x)=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^3-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{8}{27}-3x+4=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^3-\dfrac{13}{3}x+\dfrac{116}{27}$

$=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^3-\dfrac{13}{3}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{38}{27}$ より，

$y=f(x)\ \left(-\dfrac{7}{4}\leqq x\leqq 3\right)$ は，$y=g(x)=x^3-\dfrac{13}{3}x\ \left(-\dfrac{29}{12}\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}\right)$ を x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$，

y 軸方向に $\dfrac{38}{27}$ だけ平行移動したものである。$y=g(x)=x^3-\dfrac{13}{3}x\ \left(-\dfrac{29}{12}\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}\right)$ の最小値と最大値を考える。

$g'(x)=3x^2-\dfrac{13}{3}$ より $g'(x)=0$ となるのは，$x=\pm\dfrac{\sqrt{13}}{3}$。$-\dfrac{29}{12}<-\dfrac{\sqrt{13}}{3}<\dfrac{\sqrt{13}}{3}<\dfrac{7}{3}$ であって，

$g\left(-\dfrac{29}{12}\right)=-\dfrac{6293}{1728}$，$g\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)=-\dfrac{26\sqrt{13}}{27}$，$g\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{26\sqrt{13}}{27}$，$g\left(\dfrac{7}{3}\right)=\dfrac{70}{27}$ で，

$3.6<\sqrt{13}<3.7$ から $g\left(-\dfrac{29}{12}\right)<g\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$，$g\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)>g\left(\dfrac{7}{3}\right)$ であるから，

最小値は $g\left(-\dfrac{29}{12}\right)=-\dfrac{6293}{1728}$，最大値は $g\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{26\sqrt{13}}{27}$

したがって，$f(x)$ の最小値と最大値は，

最小値 $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)=-\dfrac{6293}{1728}+\dfrac{38}{27}=-\dfrac{143}{64}$，最大値 $f\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}$

端点での値の評価も少しだけ楽な気もするのですが，極大値，極小値については明らかに楽だと思います。立方完成によって，$y=f(x)$ のグラフが原点で対称なグラフ $y=g(x)$ の平行移動となることが重要です。極値の値を確認する際の $f(x)$ を $f'(x)$ で割る処理を省略できます。生徒にとって有用な知識の補充になっていると考えて，3 次関数の立方完成と平行移動は授業で必ず扱っています。

4　３次方程式の判別式と立方完成

【３次方程式の判別式①】$ax^3+bx^2+cx+d=0$ について判別式 D は，
$D=b^2c^2+18abcd-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2$

$x^3-3x^2+9x-14=0$ の判別式 D は $D=-2187<0$ です。
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は判別式 $D>0$ のとき異なる 3 つの実数解，$D=0$ のと

き重解，$D<0$ のとき実数解を１つと判別することができます。立方完成した後の形でも判別式を見ておきます。

【３次方程式の判別式②】$x^3+ex+f=0$ について判別式 D は，$D=-4e^3-27f^2$

$X^3+6X-7=0$ の判別式 D は $D=-2187$ となっています。立方完成した後でも判別式の値は変わりません。立方完成した後に判別式の値をとるほうが明らかに容易です。x 軸方向だけの平行移動を見ているので，実数解の個数が変わらないのは当然ですが，$X=\dfrac{1\cdot x-1}{0\cdot x+1}$ という変換で判別式の値まで変わりません。変数変換に対応する行列 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の行列式が１であるために，判別式の値が変わりません。行列式の値によってどのように判別式の値が変わるかは非常に面白い事実があります。解と係数の関係と判別式の値に密接な関係があるので，まとめておきます。

5　３次方程式の解と係数の関係と判別式

【問題３】$x^3-3x^2+9x-14=0$ の解を α,β,γ とするとき，次の値を求めよ。
(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　(3) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$　(4) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

【解答例３】$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9, \alpha\beta\gamma=14$ で，

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-9$

(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=-12$

(3)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=13$

(4)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-1+(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma=7$

【問題３】のような問は頻出で，3 変数の基本対称式や 3 変数の因数分解など多くの学びがある教材だと思います。
特に $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$ の値が $f(x)=x^3-3x^2+9x-14$ としたときの $-f(1)$ の値であることは本質的な理解が必要だと思います。$x^3-3x^2+9x-14=0$ の解，α,β,γ について，$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ の値について考えてみたいと思います。

【問題４】$x^3-3x^2+9x-14=0$ の解をα,β,γ とするとき，$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ の値を求めよ。

【解答例 4-1】
$f(x)=x^3-3x^2+9x-14$ とおいて，$x^3-3x^2+9x-14=0$ の解が α,β,γ であることから，
$f(x)=x^3-3x^2+9x-14=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ として，
$f'(x)=3x^2-6x+9=(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)$
$x=\alpha,\beta,\gamma$ を代入して，
$f'(\alpha)=3\alpha^2-6\alpha+9=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=-(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)$

$f'(\beta)=3\beta^2-6\beta+9=(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)=-(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)$
$f'(\gamma)=3\gamma^2-6\gamma+9=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=-(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)$ から,
$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=(3\alpha^2-6\alpha+9)(3\beta^2-6\beta+9)(3\gamma^2-6\gamma+9)$
$=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2\cdots$(※)
ここで，$f'(x)=3x^2-6x+9=0$ の解を δ,ε とおき,
$f'(x)=3(x-\delta)(x-\varepsilon)(\delta+\varepsilon=2,\delta\varepsilon=3)$ として，さらに,
$f(x)=x^3-3x^2+9x-14=\dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-6x+9)+(4x-11)$ から,
(※) は, $f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=27(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)$
$=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$
$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=27(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$
$(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)=-f(\delta)$, $(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)=-f(\varepsilon)$ であることより,
$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=27\times f(\delta)f(\varepsilon)=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$
よって，$27\times(4\delta-11)(4\varepsilon-11)=-\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$ であるから,
$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=-27\times(4\delta-11)(4\varepsilon-11)=-27\{16\delta\varepsilon-44(\delta+\varepsilon)+121\}=-2187$
したがって，$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=\pm27\sqrt{3}i$

【解答例 4-1】の途中に出てくる $f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=27\times f(\delta)f(\varepsilon)$ という式はとても面白いと思います。また，３次関数の実数解の個数について，δ,ε が実数のとき，極大値，極小値の積 $f(\delta)f(\varepsilon)$ の符号を見て，実数解の個数を確認することが多いと思います。
$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=-f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)=-27\times f(\delta)f(\varepsilon)$ であることから,
$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$ の値は，3 次関数の実数解の個数を判別する値と分かります。
実際に $\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=D=-2187$ となっています。

> 【３次方程式の判別式③】$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解をα,β,γとするとき
> 判別式 D は，$D=a^4\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$

この事実を知っていれば,【問題４】について，3 次方程式の判別式①または②によって，$D=-2187$ を求めて，$D=\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$から $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=\pm27\sqrt{3}i$ を得ることができます。

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解をα,β とするとき判別式 D は，$D=a^2(\alpha-\beta)^2$ であって，$D=a^2(\alpha-\beta)^2=a^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=a^2\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\cdot\dfrac{c}{a}\right\}=b^2-4ac$ であることは有名です。【問題４】について補足として，別解も提示しておきます。先に有名な事実を確認しておきます。

6　対称式と交代式

> 【問題５】次の式を因数分解せよ。
> (1)　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$
> (2)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
> (3)　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

数学Ⅰにおいて頻出の因数分解ですが，(1) は a, b, c に ついて対称式であるから，３変数の基本対称式 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc によって書けるであろうという見通しで，(1) の式が a, b, c について３次であることに注意して，a, b, c について１次，２次の対称式の積 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ を疑うと少し展開して正しいことが分かります。a, b, c について３次の対称式 abc が因数でないのは明らかです。a, b, c について２次の対称式として $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$，また，a, b, c について３次の対称式として $(a+b)(b+c)(c+a)$ も頻出の因数です。(1) の式は $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ であった可能性もありました。(対称式) × (対称式) = (対称式) であるという知識は補充しておくべきと思います。

(2) は a, b, c について３次の交代式で，交代式は $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつという事実を知っていれば，(2) の式は，a, b, c について３次の交代式 $(a-b)(b-c)(c-a)$ そのものと疑いますが，係数が合わないので，$-(a-b)(b-c)(c-a)$ とすれば良いことになります。

(3) は a, b, c について４次の交代式で，交代式は $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつという事実と，(交代式)×(対称式) = (交代式) であることから，(3) の式は，$(a-b)(b-c)(c-a)\times(a+b+c)$ を疑ってみて，係数が合わないので調整して $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ としておけば良いことになります。(交代式) × (対称式) = (交代式) であること，また (交代式) × (交代式) = (対称式) であることも知識として補充されているべきだと思います。与式の次数を捉えれるという点からも教材として面白く，必ず授業で扱っています。

【問題４】について，与えられた式は３次の交代式であることと，(交代式) × (交代式) = (対称式) を考えれば，(与式)^{2}の値を考えるのは自由な発想となります。２次の場合, $\alpha-\beta$の値を $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ とするのは自然でした。

【解答例 4-2】

$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ はα,β,γ の交代式であるから，$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2$ について考える。(※ $\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2+18\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3-27(\alpha\beta\gamma)^2$ という変形はさすがに無理があると思うので，)

$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)(\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha)$ で，

$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9, \alpha\beta\gamma=14$ より，

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-9, \alpha\beta=\dfrac{14}{\gamma}, \beta\gamma=\dfrac{14}{\alpha}, \gamma\alpha=\dfrac{14}{\beta}$ であるから，

$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=(-\gamma^2-9-2\cdot\dfrac{14}{\gamma})(-\alpha^2-9-2\cdot\dfrac{14}{\alpha})(-\beta^2-9-2\cdot\dfrac{14}{\beta})$

$=-\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}(\alpha^3+9\alpha+28)(\beta^3+9\beta+28)(\gamma^3+9\gamma+28)$

$\alpha^3-3\alpha^2+9\alpha-14=0$ より, $\alpha^3+9\alpha+28=3\alpha^2+42=3(\alpha^2+14)$ であるから，

$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=-\dfrac{27}{14}(\alpha^2+14)(\beta^2+14)(\gamma^2+14)$

$=-\dfrac{27}{14}\{\alpha^2\beta^2\gamma^2+14(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+14^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+14^3\}$

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=9^2-2\cdot14\cdot3=-3$ より，

$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2=-\dfrac{27}{14}\{14^2+14\cdot(-3)+14^2\cdot(-9)+14^3\}$

$=-27(14-3-9\cdot14+14^2)=-27\cdot81$ したがって，$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=\pm27\sqrt{3}i$

(与式)^2 が対称式であることを考える【解答例 4-2】のほうが，微分を持ち出す【解答例 4-1】よりも生徒にとって自然な発想のように思います。$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ の値については，これらの方法以外にも複数の求め方があるので，教材として面白いかなと思います。

7　２次方程式の判別式と変換行列

２次方程式の判別式と，１次分数変換に対応する行列との関係についてもまとめます。

【問題６】x の２次以下の多項式を x の２次以下の多項式にする操作 A, B があり, A, B は ax^2+bx+c をそれぞれ $a(x-1)^2+bx(x-1)+cx^2$, $a+b(x-1)+c(x-1)^2$ にする。x^2+x+2 に操作 A, B を何度か施したところ $11x^2-9x+k$ になったという。定数 k の値を求めよ。

(日本数学オリンピック予選 2004)

【解説】$ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ としておく。$a(x-1)^2+bx(x-1)+cx^2=0$ の判別式 D_1は,

$(a\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+b\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+c=0$, $x\to\dfrac{1\cdot x-1}{1\cdot x-0}$ の変換で対応する行列 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の行列式は 1 である。)

$(a+b+c)x^2-(2a+b)x+a=0$ より $D_1=(2a+b)^2-4a(a+b+c)=b^2-4ac=D$

$a+b(x-1)+c(x-1)^2=0$ の判別式 D_2は,

$(a\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+b\left(\dfrac{1}{x-1}\right)+c=0$, $x\to\dfrac{0\cdot x+1}{1\cdot x-1}$ の変換で対応する行列 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ の行列式の値は -1 である。)

$cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)=0$ より $D_2=(b-2c)^2-4c(a-b+c)=b^2-4ac=D$

操作 A，B を何度か施しても $x^2+x+2=0$ と $11x^2-9x+k=0$ の判別式の値は変わらないため，判別式の値を比較して $k=2$ を得ることができます。

変換に対応する行列が $\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}$ であるとき，判別式の値が $(sv-tu)^2$ 倍になることは，$a(sx+t)^2+b(sx+t)(ux+v)+c(ux+v)^2=0$ の判別式をとることで確認できます。式の整理，因数分解のネタとしても活用できる内容だと思います。

【問題７】x の２次以下の多項式を x の２次以下の多項式にする操作 A，B があり，A，B は ax^2+bx+c をそれぞれ $a(3x+1)^2+b(3x+1)(x+1)+c(x+1)^2$，$a(x+1)^2+b(x+1)(x-2)+c(x-2)^2$にする。$x^2+3x+1$ に操作 A，B を何度か施したところ $36x^2+54x+9$ になったという。操作 A を何回施す必要があるか。

(日本数学オリンピック予選 2004　改題)

【問題７】での操作 A，B によって，判別式の値はそれぞれ 4 倍，9 倍となります。
$x^2+3x+1=0$ の判別式の値は 5 で，$36x^2+54x+9=0$ の判別式の値は 1620 で，$1620=5\times4\times9\times9$ から操作 A は１回施していると分かります。
(実際，操作 B，A，B の順で x^2+3x+1 は $36x^2+54x+9$ になります。) 判別式で遊ぶ１つのネタになるのではないかと思います。

8　最後に

最近考えていたことをまとめながらの文章になってしまい，読みにくいまとまりになってしまいましたが，内容を部分的に切り取ったりしながら，授業の展開に活用してもらえたら良いなと思います。3 次方程式の判別式と変数変換に対応する行列については偏微分などが関係してきて，生徒達には少し重いように感じたのでまとめませんでした。来年もまた，授業のネタになりそうなことをまとめたいと思います。余談ですが，$\log_{10} 2 = 0.3010$ としてしまうと，2^{196} の桁数は正しく決められないのですが，196 以外にも良くない数字がたくさん求められるのは面白そうです。本稿にミスなどありましたらご教授いただければと思います。