令和７年度 共通テスト (本試　令和７年１月19日実施)

数学Ⅰ・数学A (70分, 100点)

第１問 (配点 30)

〔1〕　a, b を実数とする。x についての方程式 $(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0$…① を考える。

(1)　$a=1$ とする。b に着目すると，①の左辺は $(4x^2-1)b+16x-8$…②と表せる。よって，②を因数分解すると $(2x-1)(\boxed{\text{ア}}\,bx+b+\boxed{\text{イ}})$ となる。したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の一つであることがわかる。

(2)　$b=2$ とする。

(i)　①の左辺を因数分解すると $(\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}})\{(a+\boxed{\text{オ}})x-\boxed{\text{カ}}\}$ となる。

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，①の解は $x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{2}$ となる。

(iii)　$a=-\boxed{\text{オ}}$ であることは，① の解が $x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ だけであるための $\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕　図１のように，直線 ℓ 上の点Aにおいて ℓ に接する半径２の円を円Oとし，ℓ 上の点Bにおいて ℓ に接する半径４の円を円O$'$とする。円Oと O$'$ は２点で交わるとし，その交点を P，Q とする。ただし，$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ とする。さらに，$\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角であるとする。このとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{QAB}$ について考えよう。

(1)　$\angle\mathrm{PAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{PBA}=\beta$ とおく。円Oの中心Oから直線PAに引いた垂線と直線PAとの交点をHとする。$\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{AOH}=\alpha$ である。よって，$\triangle\mathrm{OAH}$ に着目すると，AH=$\boxed{\text{コ}}\sin\alpha$ であるから PA=2AH=$\boxed{\text{サ}}\sin\alpha$…①である。

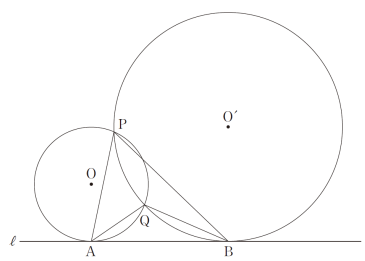


図 1

同様にして，円 O$'$ の中心 O$'$ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H$'$ とすると PB=2BH$'$=$\boxed{\text{シ}}\sin\beta$…②であることもわかる。また，$\triangle\mathrm{PAB}$ の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により $\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\boxed{\text{ス}}}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\boxed{\text{セ}}}=2R_1$ が成り立つので，PAsin$\boxed{\text{セ}}$=PBsin$\boxed{\text{ス}}$ である。この式に，①と②を代入することにより，$\sin\boxed{\text{セ}}=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\sin\boxed{\text{ス}}$，PB=$\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$PA となることがわかる。さらに，$R_1=\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ が得られる。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ α	① β

(2)　太郎さんと花子さんは，(1) の考察を振り返っている。

> 太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。
> 花子：(1) の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，$R_1\ \boxed{\text{ツ}}\ R_2$ である。さらに，$\sin\angle\mathrm{APB}\ \boxed{\text{テ}}\ \sin\angle\mathrm{AQB}$ であることもわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(3)　太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と △QAB の辺の長さについて考えている。

> 太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。
> 花子：$\angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{AQB}$ に注意して求めてみようよ。

$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ とする。このとき，$\sin\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。(1) より，$\mathrm{PB}=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,\mathrm{PA}$ であるから，$\mathrm{PA}=\sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。同様に，$\mathrm{QA}=\sqrt{7}$ であることがわかる。

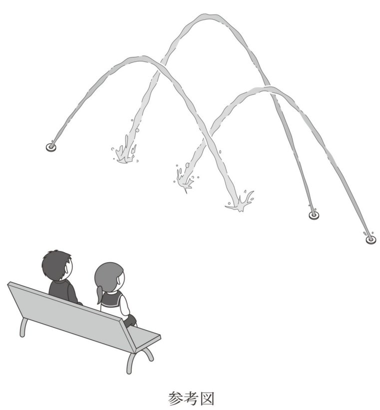
第 2 問　(配点 30)

〔1〕　花子さんと太郎さんは，公園にある二つの小さな噴水と一つの大きな噴水の高さについて話している。

> 花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。
> 太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は，放物線になると聞いたことがあるよ。
> 花子：じゃあ，放物線と仮定して，およその高さを考えてみよう。

花子さんと太郎さんは，噴水の高さについて次のように考えることにした。

噴水の水がえがく曲線は三つとも放物線とする。三つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図 1 のように座標軸が定められた平面上に，三つの噴水を正面から見た図をかく。左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 1** を，中央の大きな噴水がえがく放物線については後の**仮定 2** を設定する。図 1 の P_1，P_2，P_3 は噴水の水が出る位置である。なお，長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図

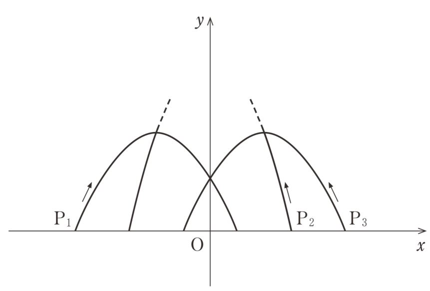


図　1

仮定１

・左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$ から出て点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ に至る。
・右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_3\left(\dfrac{5}{2},0\right)$ から出て点 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ に至る。
・C_1 と C_3 はともに点 $(0,1)$ を通る。

仮定２

中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

(1)　**仮定１**と**仮定２**のもとで考える。C_1 をグラフにもつ 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。このとき $c=\boxed{\text{ア}}$ であり，また，$y=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^2-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x+\boxed{\text{ア}}$ である。C_1 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。このことを用いると，C_2 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であることがわかる。したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ およそ 2 倍	① およそ 3 倍
② およそ 4 倍	③ およそ 5 倍

(2)　花子さんと太郎さんは，大きな噴水の高さについて話している。

花子：正面から見たとき，大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに，大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。
太郎：左右の二つの小さな噴水は変えずに，大きな噴水の水が出る位置を変えてみたらどうかな。
花子：大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

仮定２の代わりに次の**仮定２′**をおく。

仮定２′

・中央の大きな噴水の水がえがく放物線 ${C_2}'$ は，x 軸の正の部分の点 ${\mathrm{P}_2}'$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。
・${C_2}'$ の頂点の y 座標は 5 である。

仮定１と**仮定２′**のもとで考える。このとき，${\mathrm{P}_2}'$ は P_2 より $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ だけ $\boxed{\text{ソ}}$ の方にある。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ P_1	① P_3

〔2〕　以下の問題を解答するにあたっては，与えられたデータに対して，次の値を外れ値とする。

「(第 1 四分位数)−1.5×(四分位範囲)」以下の値
「(第 3 四分位数)+1.5×(四分位範囲)」以上の値

太郎さんは，47 都道府県における外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の動向を調べるため，それらに関するデータを分析することにした。外国人宿泊者数を，日本国内に住所を有しない宿泊者の人数の 1 年間の合計とし，日本人宿泊者数を，日本国内に住所を有する宿泊者の人数の 1 年間の合計とする。宿泊者数に関するデータは千の位を四捨五入し，1 万人単位で表したものとし，以下においては単位 (万人) を省略して用いることとする。例えば，「4567890 人」は 「457」とする。

なお，以下の図や表については，国土交通省の Web ページをもとに作成している。

(1) (i) 図 1 は，47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図である。なお，散布図には原点を通り，傾きが 10 の直線 (破線) を付加している。また，日本人宿泊者数が 1000 を超える都道府県の数は 12 である。

次の (a), (b) は，図 1 に関する記述である。

(a) 令和 4 年について，外国人宿泊者数が 100 を超え，かつ日本人宿泊者数が 2500 を超える都道府県の数は 2 である。

(b) 令和 4 年について，日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の 10 倍未満である都道府県の割合は 50 %未満である。

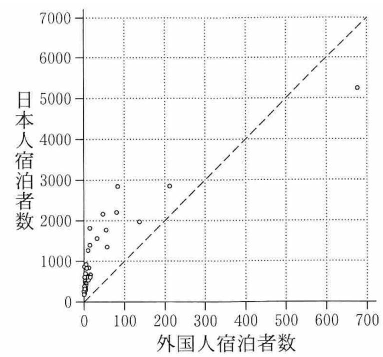


図 1　令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図

(a)，(b) の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{タ}$ である。

$\boxed{タ}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

(ii) 47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数を分析した結果，外れ値となる都道府県の数は 8 であった。一方，表 1 は 47 都道府県における令和 4 年の日本人宿泊者数を，値の小さい順に並べ，その順に都道府県 P1,P2,⋯,P47 としたものである。この中で，外国人宿泊者数で外れ値となる都道府県 (P37,P40,P42,P43,P44,P45,P46,P47) に印*を付けている。

表 1　47 都道府県における令和 4 年の日本人宿泊者数

都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数
P 1	182	P 13	373	P 25	620	P 37*	1339
P 2	187	P 14	388	P 26	625	P 38	1399
P 3	197	P 15	395	P 27	646	P 39	1547
P 4	204	P 16	401	P 28	670	P 40*	1765
P 5	255	P 17	405	P 29	683	P 41	1814
P 6	270	P 18	452	P 30	705	P 42*	1970
P 7	276	P 19	458	P 31	831	P 43*	2158
P 8	286	P 20	501	P 32	832	P 44*	2195
P 9	303	P 21	522	P 33	839	P 45*	2831
P 10	321	P 22	537	P 34	876	P 46*	2839
P 11	328	P 23	605	P 35	925	P 47*	5226
P 12	351	P 24	613	P 36	1251		

表 1 のデータにおいて，四分位範囲は $\boxed{チ}$ となることから，令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県の数は $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{チ}$ の解答群

⓪ 320	① 450	② 597	③ 638	④ 900
⑤ 966	⑥ 1253	⑦ 1261	⑧ 1602	⑨ 1864

(2)　47 都道府県におけるある年の外国人宿泊者数を x，日本人宿泊者数を y とし，x と y の値の組を，それぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{47}, y_{47})$ と表す。x，y の平均値をそれぞれ $\bar{x}$，$\bar{y}$ とし，x と y の分散をそれぞれ ${s_x}^2$,${s_y}^2$ とする。また，x と y の共分散を s_{xy} とする。

47 都道府県それぞれにおける外国人宿泊者数と日本人宿泊者数を足し合わせた合計宿泊者数を z とし，その値を $z_i = x_i + y_i$ (i=1,2,$\cdots$,47) と表す。例えば，$i = 7$ のときは $z_7 = x_7 + y_7$ である。z の平均値を $\bar{z}$ とするとき，$z_i - \bar{z}$=$(x_i - \bar{x})$+$(y_i - \bar{y})$ (i=1,2,$\cdots$,47) である。このことに着目すると，z の分散を ${s_z}^2$ とするとき，${s_z}^2 = \boxed{テ}$ となる。

また，令和 4 年の x と y の間には正の相関があることが図 1 からわかる。このことから，令和 4 年について，${s_z}^2$ と ${s_x}^2+{s_y}^2$ の関係として，後の⓪ ～ ②のうち，正しいものは $\boxed{ト}$ であることがわかる。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ ${s_x}^2 + {s_y}^2 - 2s_{xy}$	① ${s_x}^2 + {s_y}^2 - s_{xy}$	② ${s_x}^2 + {s_y}^2$
③ ${s_x}^2 + {s_y}^2 + s_{xy}$	④ ${s_x}^2 + {s_y}^2 + 2s_{xy}$	

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ ${s_z}^2 > {s_x}^2 + {s_y}^2$	① ${s_z}^2 = {s_x}^2 + {s_y}^2$	② ${s_z}^2 < {s_x}^2 + {s_y}^2$

(3)　太郎さんが住む地域では，その地域に宿泊を促すためのキャンペーンとして，キャンペーン A, B が実施されている。太郎さんは, キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといううわさを聞いた。このうわさのとおり，キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを確かめることにした。そこで，かたよりなく選んだ人たちに，キャンペーン A, B のどちらがよいかについて，二択のアンケートを行ったところ，アンケートに回答した 35 人のうち, 23 人が「キャンペーン A の方がよい」と答えた。この結果から，一般にキャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを，次の**方針**で考えることにした。

方針

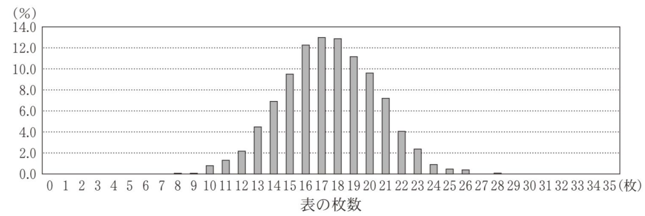
・“「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しい” という仮説を立てる。

・この仮説のもとで，かたよりなく選ばれた 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率が 5 %未満であれば，その仮説は誤っていると判断し，5 %以上であればその仮説は誤っているとは判断しない。

後の**実験結果**は，35 枚の硬貨を投げる実験を 1000 回行ったとき，表が出た枚数ごとの回数の割合を示したものである。

実験結果

表の枚数(枚)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
割合(%)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.8	1.3
表の枚数(枚)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
割合(%)	2.2	4.5	6.9	9.5	12.3	13.0	12.9	11.2	9.6	7.2	4.1	2.4
表の枚数(枚)	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
割合(%)	0.9	0.5	0.4	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



実験結果を用いると, 35 枚の硬貨のうち 23 枚以上が表となった割合は, $\boxed{\text{ナ}}$. $\boxed{\text{ニ}}$ %である。これを，35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率とみなし, **方針**に従うと,“「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しい” という仮説は $\boxed{\text{ヌ}}$ 。したがって, 今回のアンケート結果からは, キャンペーン A の方がよいと思っている人が $\boxed{\text{ネ}}$ 。

$\boxed{\text{ヌ}}$, $\boxed{\text{ネ}}$ については，最も適当なものを，次のそれぞれの解答群から一つずつ選べ。

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ 誤っていると判断する	① 誤っているとは判断しない

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ 多いといえる	① 多いとはいえない

第 3 問 (配点 20)

6 点, A, B, C, D, E, F を頂点とし，三角形 ABC と DEF, および四角形 ABED, ACFD, BCFE を面とする五面体がある。ただし，直線 AD と BE は平行でないとする。

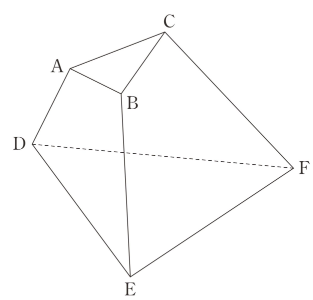
以下では，例えば，面 ABC を含む平面を平面 ABC，面 ABED を含む平面を平面 ABED，などということにする。

(1) 3 直線 AD，BE，CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり，平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。点 P は直線 AD 上にあり，直線 AD は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{ア}}$ との交線であるから，点 P は平面 $\boxed{\text{ア}}$ 上にあることがわかる。

また，点 P は直線 BE 上にあり，直線 BE は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{イ}}$ との交線であるから，点 P は平面 $\boxed{\text{イ}}$ 上にあることがわかる。

平面 $\boxed{\text{ア}}$ と平面 $\boxed{\text{イ}}$ との交線は直線 CF であるから，点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって，3 直線 AD，BE，CF は点 P で交わる。



参考図

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ABC	① DEF	② ACFD	③ BCFE

(2) 五面体において，面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり，AD=7, BE=11, CF=17, DE=9 であるとする。また，6 点 A，B，C，D，E，F はある一つの球面上にあるとし，その球面を S と

する。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i)　平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり，4 点 A，B，E，D はその円周上にある。このことから，三角形 PAB と PED は相似であることがわかり，その相似比は 1 : $\boxed{ウ}$ である。したがって，$\boxed{ウ}$ PA=PB+$\boxed{エオ}$，$\boxed{ウ}$ PB=PA+$\boxed{カ}$ が成り立つ。よって PA=$\boxed{キ}$，PB=$\boxed{ク}$ となる。

(ii)　平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると，方べきの定理より PC=$\boxed{ケ}$ となる。したがって EF=$\boxed{コサ}$，DF=$\boxed{シス}$ となる。

(iii)　∠ADE，∠ADF，∠EDF の大きさに着目すると，次の命題 (a)，(b)，(c) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{セ}$ であることがわかる。

(a)　平面 ABED と平面 DEF は垂直である。
(b)　直線 DE は平面 ACFD に垂直である。
(c)　直線 AC と直線 DE は垂直である。

$\boxed{セ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

第 4 問　(配点 20)

ある行事で，主催者が次の**ゲーム**を計画している。

ゲーム

参加者はくじを最大 3 回引き，当たりが出たら，1200 円相当の景品を主催者から受け取り，以降はくじを引かない。参加者はくじを 1 回目，2 回目，3 回目で異なる箱から引く。1 回目のくじ引きで当たりが出なかった場合は 2 回目のくじを引き，2 回目のくじ引きでも当たりが出なかった場合は 3 回目のくじを引く。主催者は，当たりの出る確率について次のとおり設定する。

・1 回目に当たりが出る確率は $\frac{3}{16}$ である。
・1 回目に当たりが出ず，かつ 2 回目に当たりが出る確率は $\frac{1}{8}$ である。
・1 回目，2 回目ともに当たりが出ず，かつ 3 回目に当たりが出る確率は $\frac{1}{16}$ である。

ゲームの参加料について，主催者は 2 種類の支払い方法を考えている。参加料に関する設定の妥当性について，主催者は判断を行う。

(1)　1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。このことから，1 回目，2 回目ともに当たりが出ない確率は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ であることがわかる。1 回も当たりが出ない確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

以下では，主催者が参加者に対して負担する金額を X 円とする。すなわち，参加者が**ゲーム**で景品を受け取るとき $X = 1200$，参加者が**ゲーム**で景品を受け取らないとき $X = 0$ である。

(2)　(i)　数量 X の期待値は $\boxed{コサシ}$ である。なお，必要に応じて，次に示す表を用いて考えてもよい。

X	0	1200	計
確率			1

(ii)　次の**支払い方法 1** を考える。

支払い方法１

参加者は１回目のくじを引く直前に参加料 500 円を支払う。

支払い方法１の場合，主催者が負担する金額 X 円の期待値が，参加料の金額 500 円未満であるとき，主催者は参加料の設定は妥当であると判断し，参加料の金額の 500 円以上であるとき，参加料の設定は妥当でないと判断する。(i) で求めた X 円の期待値 **コサシ** 円は参加料の金額 500 円 **ス** 。したがって，主催者は参加料 500 円という設定について **セ** と判断する。

ス の解答群

⓪ 未満である	① 以上である

セ の解答群

⓪ 妥当である	① 妥当ではない

(3)　a を正の整数とする。次の**支払い方法２**を考える。

支払い方法２

参加者は１回目，２回目，３回目のくじを引く直前にそれぞれ料金 a 円を支払う。なお，この料金をくじ引き料といい，当たりが出た後は，くじを引かないため，くじ引き料を支払わないことになる。

支払い方法２で，**ゲーム**を通して参加者が支払うくじ引き料の合計を参加料とし，Y 円で表す。

(i)　$a = 170$ とする。このとき，次が成り立つ。

・１回目に当たりが出るとき，$Y = 170$ である。
・１回目に当たりが出ず，かつ２回目に当たりが出るとき，$Y = 340$ である。
・１回目，２回目ともに当たりが出ないとき，$Y = 510$ である。

数量 Y の期待値は **ソタチ** である。なお，必要に応じて，次に示す表を用いて考えてもよい。

Y	170	340	510	計
確率				1

(ii)　**支払い方法２**の場合，主催者が負担する金額 X 円の期待値が，参加料 Y 円の期待値未満であるとき，主催者はくじ引き料の設定は妥当であると判断し，参加料 Y 円の期待値以上であるとき，くじ引き料の設定は妥当ではないと判断する。(2) の (i) で求めた X 円の期待値 **コサシ** 円は，$a = 170$ と設定した場合の**支払い方法２**で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 **ソタチ** 円 **ツ** 。したがって，主催者はくじ引き料 170 円という設定について **テ** と判断する。また，主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは $a >$ **トナニ** のときであり，主催者がくじ引き料の設定が妥当ではないと判断するのは $a \leqq$ **トナニ** のときである。

ツ の解答群

⓪ 未満である	① 以上である

テ の解答群

⓪ 妥当である	① 妥当ではない

数学II・数学B・数学C (70 分, 100 点)

第1問 (必答問題) (配点 15)

(1) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \cdots ①$ の解を求めよう。

以下では，$\alpha = \theta + \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = 2\theta$ とおく。このとき，① は

$\sin\alpha = \sin\beta \cdots ②$

となる。

(i) 二つの一般角 α と β が等しければ，$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ は等しい。$\alpha = \beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であり，これは ① の解の一つである。そして $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき

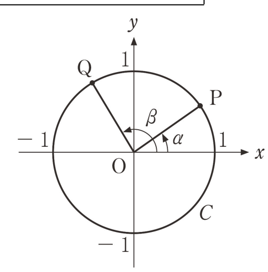
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

(ii) 太郎さんと花子さんは，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ 以外の ① の解を求める方法について話している。

> 太郎：角が等しくなくても，サインの値が等しくなることがあるね。
> 花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか，単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円を C とする。さらに，α の動径と C との交点を P，β の動径と C との交点を Q とする。ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図

② が成り立つときに，点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として，次の ⓪〜③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 点 P と点 Q は同じ点である。
① 点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい。
② 点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。
③ 点 P と点 Q は，原点 O に関して対称である。

(iii) $\theta \neq \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ とする。

- $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は $\alpha + \beta = \boxed{\text{オ}}$ を満たすことがわかる。

これより，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの ① の解 $\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi$ を得る。

- $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合を考える。このとき，$\pi < \beta < 2\pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は $\alpha + \beta = \boxed{\text{ケ}}$ を満たすことがわかる。

これより，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの ① の解 $\theta = \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$ を得る。

以上より，$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，① の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}},\quad \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$$

である。

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① $\frac{\pi}{2}$	② π	③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π	⑤ $\frac{5}{2}\pi$	⑥ 3π	⑦ $\frac{7}{2}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$$

の解は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$, $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\pi$ である。

第 2 問 (必答問題) (配点 15)

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 12，13 ページの常用対数表（本誌割愛）を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり，メダカの飼育係になった花子さんは，水質を良くする効果がある水草 A を水面に浮かべることにした。一方で，水草 A が増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは，水草 A を定期的に除去することにし，その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

基本方針

- 水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合 (%) で測ることにし，この量をもとに作業計画を立てる。
- 作業は正午に行う。

(1) 水草 A の増え方を知るために，観測を行った。次の表は，観測を開始した日を 0 日目として，0 日目，3 日目，6 日目，9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

観測日(日目)	0	3	6	9
水草 A の量(%)	17.2	22.7	30.0	39.6

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ，いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草 A の量は，3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから，「水草 A の量は，1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え，その倍率を定数 r とした。

観測結果から，3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。このとき，r は $\boxed{\text{ア}} = 1.32$ を満たす。$\log_{10} 1.32 = \boxed{\text{イ}}$ であるので

$$\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}}$$

が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ r	① $\frac{r}{3}$	② $3r$	③ r^3	④ 3^r	⑤ $\log_3 r$

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.0899	① 0.1206	② 0.1523	③ 0.2148
④ 0.2405	⑤ 0.3010	⑥ 0.3636	⑦ 0.4771

(2)　花子さんは，**基本方針**に次の**条件**を加えて，作業計画を立てることにした。

条件

- 作業は 14 日ごとに行う。
- 作業の後に残す水草 A の量を，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 %を超えない範囲で，できるだけ多くする。

作業の後に残す水草 A の量について考える。

作業を行った日を 0 日目として，次回の作業は 14 日目に行う。なお，作業にかかる時間は考えないものとする。

次のような実数 a を考える。作業の後に残す水草 A の量を a %としたとき，14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60 %になる。

このとき，(1) の定数 r を用いると，14 日目の正午に水草 A の量は a の $\boxed{\text{キ}}$ 倍になるので

$$a \times \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} \quad \cdots ①$$

が成り立つ。

① の両辺の常用対数をとり，(1) で求めた $\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると，$\log_{10} a = \boxed{\text{コ}}$ となる。

a の決め方から，作業の後に残す水草 A の量を a %以下にすれば，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 %を超えないことがわかる。a 以下で最大の整数は $\boxed{\text{サシ}}$ であることから，花子さんは作業の後に残す水草 A の量を $\boxed{\text{サシ}}$ %にすることにした。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ r	① $\dfrac{r}{14}$	② $14r$	③ r^{14}	④ 14^r	⑤ $\log_{14} r$

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.7758	① 1.0670	② 1.0934	③ 1.2154
④ 1.3410	⑤ 1.4894	⑥ 1.7806	⑦ 2.4666

第 3 問　(必答問題) (配点 22)

k を 0 でない実数とし，$f(x)$ を 2 次関数とする。$F(x)$ と $G(x)$ はどちらも導関数が $f(x)$ であるような関数で，$F(x)$ は $x = 0$ で極小値 0 をとり，$G(x)$ は $x = k$ で極大値 0 をとるとする。

(1)　まず，$F(x) = 2x^3 + 3x^2$ の場合を考える。

$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}\, x^2 + \boxed{\text{イ}}\, x$$

であり，$F(x)$ は $x = \boxed{\text{ウエ}}$ で極大値をとる。また，$G(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$G(x) = \boxed{\text{オ}}\, x^3 + \boxed{\text{カ}}\, x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と表され，$G(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。さらに $G(x)$ に関する条件から $C = \boxed{\text{クケ}}$ である。

(2) 次に，$k > 0$ の場合を考える。

このとき，$F(x)$ と $G(x)$ に関する条件から，$y = F(x)$ のグラフと $F(x)$，$G(x)$ の極値について調べよう。

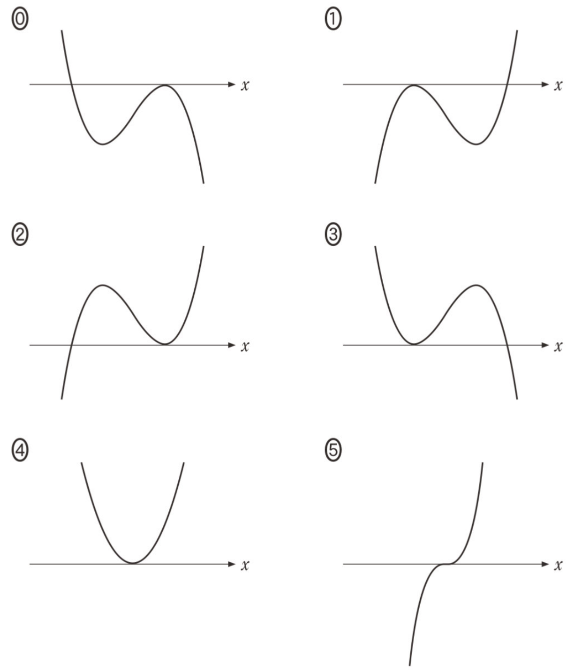
(ｉ) $F(x)$ が $x = 0$ で極小値をとることから，$f(0) = \boxed{\text{コ}}$ であり，$x = 0$ の前後で $f(x)$ の符

号は $\boxed{\text{サ}}$ 。さらに，$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから，$f(k)=$ $\boxed{\text{シ}}$ であり，$x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\text{ス}}$ 。したがって，$F(x)$ の導関数は $f(x)$ であることに注意すると，座標平面において $y=F(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$ ，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 負から正に変わる	① 正から負に変わる
② 変わらない	

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑤ のうちから一つ選べ。なお，y 軸は省略しているが，上方向が正の方向であり，x 軸は直線 $y=0$ を表している。



(ii) $F(x)$ に関する条件から，すべての実数 x に対して，

$$F(x)=\int_{\boxed{\text{タ}}}^{\boxed{\text{ソ}}} f(t)dt$$

が成り立つ。このことと (i) の考察により，$F(x)$ の極大値は

$$\int_{\boxed{\text{ツ}}}^{\boxed{\text{チ}}} f(t)dt$$

と表され，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=$ $\boxed{\text{テ}}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の $\boxed{\text{ト}}$ と等しいことがわかる。

さらに $G(x)$ に関する条件から，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の $\boxed{\text{ナ}}$ と等しいことがわかる。

$\boxed{\text{ソ}}$ 〜 $\boxed{\text{ツ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① 1	② k	③ x

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $f(x)$	① $F(x)$	② $G(x)$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ 面積	① 面積の -1 倍

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ 極小値	① 極大値
② 極小値の -1 倍	③ 極大値の -1 倍

第 4 問 (選択問題) (配点 16)

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。ただし，図形の内部は，境界（境界線）を含まないものとする。

例えば，直線 $y=-x+5$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を S とする。S は図 1 の灰色部分であり，S の内部にある格子点を黒丸，内部にない格子点を白丸で表している。したがって，S の内部にある格子点の個数は 6 である。

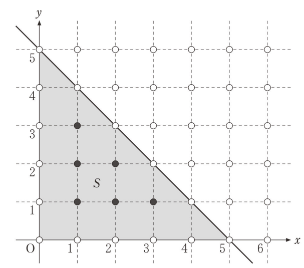


図 1

(1) 直線 $y=3x$ と x 軸，直線 $x=21$ で囲まれた図形を T とする。T の内部にある格子点の個数を考える。

直線 $x=1$ 上の格子点で T の内部にあるものは，点 (1, 1) と点 (1, 2) の 2 個である。点 (1, 0) と点 (1, 3) は T の境界にあるため，内部にはない。

n を整数とする。直線 $x=n$ が T の内部にある格子点を通るのは，$1 \leqq n \leqq 20$ のときである。$1 \leqq n \leqq 20$ のとき，直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数を a_n とおく。$a_1=2$ であり，$a_2=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$a_3=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ が $\boxed{\text{エ}}$ の $\boxed{\text{オ}}$ 数列である。

したがって，T の内部にある格子点の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ 公差	① 公比

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 等差	① 等比

(2) n を自然数とする。関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形を U とする。

k を整数とする。直線 $x=k$ が U の内部にある格子点を通るとき，直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

したがって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{コ}}} \left(\boxed{\text{ケ}} \right) = \boxed{\text{サ}}$$

である。

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ $2k-2$	① $2k-1$	② $2k$
③ $2^{k-1}-2$	④ $2^{k-1}-1$	⑤ 2^{k-1}
⑥ 2^k-2	⑦ 2^k-1	⑧ 2^k

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ $n-1$	① n	② $n+1$
③ $2n-1$	④ $2n$	⑤ $2n+1$
⑥ 2^n-1	⑦ 2^n	⑧ 2^n+1

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ 2^n-2n-1	① 2^n-2n	② 2^n-n-1
③ 2^n-n	④ 2^n-3	⑤ $2^{n+1}-2n-2$
⑥ $2^{n+1}-2n-1$	⑦ $2^{n+1}-n-2$	⑧ $2^{n+1}-n-1$
⑨ $2^{n+1}-3$		

(3)　a，b，c は整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$ を満たすとする。放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形を V とする。すべての自然数 n に対して，V の内部にある格子点の個数が n^3 となるのは，$a=$ $\boxed{シ}$ ，$b=$ $\boxed{スセ}$ ，$c=$ $\boxed{ソ}$ のときである。

第 5 問　(選択問題) (配点 16)

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 31 ページの正規分布表（本誌割愛）を用いてもよい。

Q 地域ではレモンを栽培しており，収穫されるレモンを重さによってサイズごとに分類している（表 1）。過去に収穫されたレモンの重さは，平均が 110g，標準偏差が 20g の正規分布に従うとする。

表 1　レモンのサイズと重さの対応関係

サイズ	レモン 1 個の重さ
S	80 g 以上 90 g 未満
M	90 g 以上 110 g 未満
L	110 g 以上 140 g 未満
2 L	140 g 以上 170 g 未満
その他	80 g 未満または 170 g 以上

(1)　Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ（単位は g）は，過去に収穫されたレモンの重さと同じ分布に従うとする。すなわち，今年収穫される 1 個のレモンの重さを確率変数 X で表すと，X は正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うとする。よって，今年収穫されるレモンから無作為にレモンを 1 個抽出するとき，そのレモンが L サイズである確率は，$P(110 \leqq X < 140) = P(110 \leqq X \leqq 140)$ であることに注意すると，0.$\boxed{アイウエ}$ である。

いま，Q 地域で今年収穫されるレモンが 20 万個であるとし，その中の L サイズのレモンの個数を確率変数 Y で表すと，Y は二項分布に従い，Y の平均（期待値）は $\boxed{オ}$ となる。

オ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ。

⓪ 13100	① 13360	② 31740	③ 68260
④ 86640	⑤ 100000	⑥ 168260	⑦ 186640

(2)　太郎さんと花子さんは，Q 地域で今年収穫されるレモンから何個かを抽出して，今年収穫されるレモンの重さの平均（母平均）を推定する方法について話している。

太郎：母平均に対する信頼度 95 %の信頼区間の幅を 4g 以下にして推定したいね。
花子：母標準偏差を過去と同じ 20g とすると，何個のレモンの重さを量ればいいかな。
太郎：信頼区間の式から，必要な標本の大きさを求めてみようよ。

母平均に対する信頼度 95 %の信頼区間の幅を 4g 以下にするために必要な標本の大きさを求める。いま，Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし，その重さの母平均を mg，母標準偏差を σg とする。この母集団から無作為に抽出した n 個のレモンの重さを確率変数 W_1，W_2，$\cdots$，W_n で表すと，標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}=\dfrac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \boxed{\text{カ}}\right)$ に従う。また，m に対する信頼度 95 %の信頼区間を $A \leqq m \leqq B$ と表すと，信頼区間の幅は $B-A=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}}$ となる。

したがって，母標準偏差を過去と同じ $\sigma=20$ として，n に関する不等式

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}} \leqq 4 \cdots ①$$

を満たす自然数 n を求めればよい。① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると，$\left(\boxed{\text{キ}}\right)^2 \leqq 16n$ となる。この不等式を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると，$n_0=\boxed{\text{クケコ}}$ である。ゆえに，m に対する信頼度 95 %の信頼区間の幅を 4g 以下にするために必要な標本の大きさ n のうち，最小のものは クケコ であることがわかる。

カ の解答群

⓪ σ	① $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	② $\dfrac{\sqrt{\sigma}}{n}$	③ $\dfrac{\sigma}{n}$
④ σ^2	⑤ $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$	⑥ $\dfrac{\sigma^2}{n}$	⑦ $\dfrac{\sigma^2}{n^2}$

キ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ σ	① 1.65σ	② 1.96σ
③ 2σ	④ 3.3σ	⑤ 3.92σ

(3)　太郎さんと花子さんは，Q 地域で今年収穫されるレモンの重さについて話している。

太郎：今年のレモンの重さは，他の地域では例年よりも軽そうだと聞いたよ。
花子：Q 地域でも，過去の平均 110g と比べて軽いのかな。
太郎：標本の大きさを 400，母標準偏差を過去と同じ 20g として，仮説検定をしてみようよ。

(2) の m を用いて，Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均 mg が過去の平均 110g より軽いといえるかを，有意水準 5 %（0.05）で仮説検定を行い検証したい。ただし，標本の大きさは 400，母標準偏差は過去と同じ 20g とする。ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき，帰無仮説は「$m=110$」，対立仮説は「 サ 」である。これらの仮説に対して，有意水準 5 %で帰無仮説が棄却（否定）されるかどうかを判断する。

いま，帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので，(2) の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 シ に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2g となった。このとき，確率 $P(\overline{W} \leqq 108.2)$ は 0.スセソタ となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5 %より チ 。したがって，有意水準 5 %で今年収穫されるレモンの重さの母平均は

110g より軽いと $\boxed{\text{ツ}}$ 。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $m < 110$	① $m \leqq 110$	② $m = 110$
③ $m \geqq 110$	④ $m > 110$	

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $N(108.2,\ 400)$	① $N(108.2,\ 20)$	② $N(108.2,\ 1)$
③ $N(110,\ 400)$	④ $N(110,\ 20)$	⑤ $N(110,\ 1)$

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

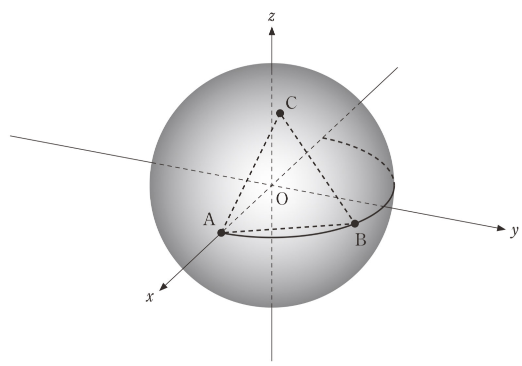
⓪ 小さいから，帰無仮説は棄却されない
① 小さいから，帰無仮説は棄却される
② 大きいから，帰無仮説は棄却されない
③ 大きいから，帰無仮説は棄却される

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 判断できる	① 判断できない

第 6 問　(選択問題) (配点 16)

O を原点とする座標空間において，O を中心とする半径 1 の球面を S とする。S 上に二つの点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(a, \sqrt{1-a^2},\ 0)$ をとる。ただし，a は $-1 < a < 1$ を満たす実数とする。S 上の点 C を，△ABC が正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



参考図

(1)　点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。C が S 上にあるとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = \boxed{\text{ア}}$$

である。これをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\text{ア}} \quad \cdots ①$$

となる。

さらに，△ABC が正三角形であるとする。△OAC と △OAB は，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots ②$$

となる。同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}\,x+\boxed{\text{オ}}\,y=\boxed{\text{ウ}}\quad\cdots③$$

となる。

逆に，実数 x，y，z が ①，②，③ を満たすとき，$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ は S 上の点であり，△ABC は正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$
③ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$　④ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ a　① $(1+a)$　② $(1-a)$
③ a^2　④ $(1-a^2)$　⑤ $\sqrt{1-a^2}$

(2)　a に具体的な値を代入して，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

$$x=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。この x，y に対して，① を満たす実数 z は $\boxed{\text{サ}}$ 。したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{サ}}$ 。

(ii)　$a=-\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう。(i) と同様に考えると，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{シ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ない　① ちょうど一つある　② ちょうど二つある
③ ちょうど三つある　④ ちょうど四つある　⑤ 無限に多くある

(3)　△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を見つけよう。

実数 x，y，z は，①，②，③ を満たすとする。② と ③ から

$$x=\boxed{\text{ウ}},\quad y=\frac{\boxed{\text{ウ}}\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。このとき，① から

$$z^2=\boxed{\text{ア}}-x^2-y^2=\frac{\boxed{\text{ス}}}{1+a}$$

となる。さらに，$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから $\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ である。

逆に，$\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

以上のことから，$\boxed{\text{セ}}$ は，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。

ス の解答群

⓪ $1-2a$	① $(1-a)^2$
② $(1+2a)^2$	③ $(1+2a)(1-a)$
④ $(1-2a)(1-a)$	⑤ $(1-2a^2)(1+2a)$
⑥ $(1+2a^2)(1-a)$	⑦ $(1-2a^2)(1-a)$

セ の解答群

⓪ $-1 < a < 1$　① $-1 < a \leqq \frac{1}{2}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{2} \leqq a < 1$　⑤ $\frac{1}{2} \leqq a < 1$

⑥ $-1 < a \leqq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leqq a < 1$

⑦ $-1 < a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a < 1$

第 7 問 (選択問題) (配点 16)

α, β, γ を異なる複素数とし，複素数平面上に 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) をとる。直線 AB と直線 AC の関係について考えよう。

以下，複素数の偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(1)　$\alpha = 3+2i$，$\beta = 7$，$\gamma = 7+10i$ の場合を考える。$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を求めよう。

$$\gamma - \alpha = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\,i$$
$$\beta - \alpha = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\,i$$

であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \boxed{\text{オ}}$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ の偏角は $\boxed{\text{カ}}$ である。

オ の解答群

⓪ i	① $1+i$	② 2	③ $2i$
④ $-i$	⑤ $1-i$	⑥ -2	⑦ $-2i$

カ の解答群

⓪ 0	① $\frac{\pi}{6}$	② $\frac{\pi}{4}$	③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$	⑤ $\frac{3}{4}\pi$	⑥ π	⑦ $\frac{5}{4}\pi$
⑧ $\frac{3}{2}\pi$	⑨ $\frac{7}{4}\pi$		

(2)　$w = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$ のときである。このとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるから

$$w + \overline{w} = \boxed{\text{ク}}$$

である。逆に，$w \neq 0$ に注意すると，$w + \overline{w} = \boxed{\text{ク}}$ のとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

キ の解答群

⓪ 0 でない実数	① $1+i$ または $1-i$
② 純虚数（実部が 0 である虚数）	③ $-1+i$ または $-1-i$

ク の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ i
④ $2i$	⑤ -1	⑥ -2	⑦ $-i$

(3)　z は 0，2，-2 でない複素数とする。

(ｉ)　$\alpha = z$，$\beta = 2$，$\gamma = \dfrac{4}{z}$ とする。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件について考えよう。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\dfrac{4}{z}-z}{2-z} = 1+\frac{2}{z}$$

が成り立つので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \boxed{\text{ク}}$$

である。これは

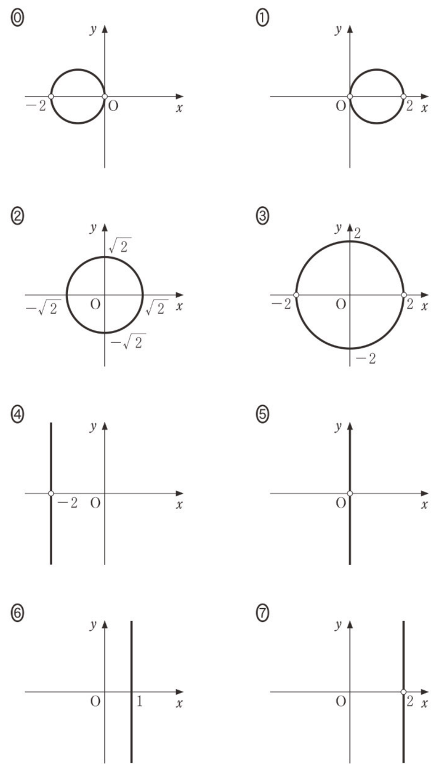
$$2+\frac{2}{z}+\frac{2}{\overline{z}} = \boxed{\text{ク}}$$

と変形できる。さらに，この両辺に $z\overline{z}$ をかけて整理すると，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $\lvert z\rvert = \lvert z-4\rvert$	① $\lvert z\rvert = \lvert z-2\rvert$
② $\lvert z\rvert = \lvert z+4\rvert$	③ $\lvert z+1\rvert = \lvert z-1\rvert$
④ $\lvert z-1\rvert = 1$	⑤ $\lvert z\rvert = 2$
⑥ $\lvert z+1\rvert = 1$	⑦ $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ。



(ii)　(i) の α，β，γ をそれぞれ -1 倍した複素数 $\alpha' = -z$，$\beta' = -2$，$\gamma' = -\dfrac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}'(\alpha')$，$\mathrm{B}'(\beta')$，$\mathrm{C}'(\gamma')$ について，直線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ と直線 $\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{サ}}$ である。

(iii)　(i) の α，β，γ における z を $-z$ に置き換え，$\alpha'' = -z$，$\beta'' = 2$，$\gamma'' = -\dfrac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}''(\alpha'')$，$\mathrm{B}''(\beta'')$，$\mathrm{C}''(\gamma'')$ について，直線 $\mathrm{A}''\mathrm{B}''$ と直線

$A''C''$ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。