令和6年度 共通テスト (本試　令和6年1月17日実施)

数学Ⅰ・数学A (70分, 100点)

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕不等式 $n < 2\sqrt{13} < n+1 \cdots$ ① を満たす整数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。実数 a, b を

$a = 2\sqrt{13} - \boxed{\text{ア}} \cdots$②, $b = \dfrac{1}{a} \cdots$③ で定める。このとき $b = \dfrac{\boxed{\text{イ}} + 2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}} \cdots$④ である。

また $a^2 - 9b^2 = \boxed{\text{エオカ}}\sqrt{13}$ である。① から $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2} < \sqrt{13} < \dfrac{\boxed{\text{ア}}+1}{2} \cdots$⑤ が成り立つ。

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

> 太郎：⑤から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
> 花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

① と ④ から $\dfrac{m}{\boxed{\text{ウ}}} < b < \dfrac{m+1}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{キク}}$ となる。よって，③から

$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m+1} < a < \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m} \quad \cdots$ ⑥ が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第1位の数字は $\boxed{\text{コ}}$，小数第2位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。

〔2〕以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて三角比の表（本誌割愛）を用いてもよい。

水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

図1のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには7％と表示されているとする。電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を ℓ とする。電柱の先端を点Aとし，根もとを点Bとする。電柱の影について，地面にある部分を線分BCとし，坂にある部分を線分CDとする。線分BC，CDがそれぞれ ℓ と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4点A，B，C，Dを通る平面は ℓ と垂直である。その平面において，図2のように，直線ADと直線BCの交点をPとすると，太陽高度とは ∠APB の大きさのことである。

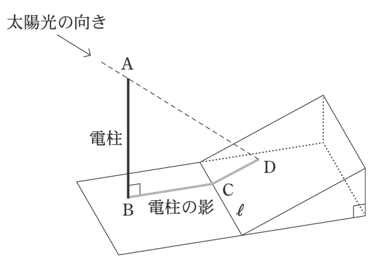


図 1

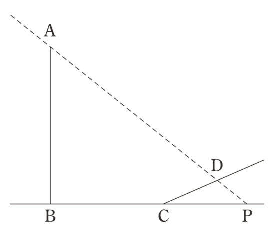


図 2

道路標識の7％という表示は，この坂をのぼったとき，100m の水平距離に対して 7m の割合で高くなることを示している。n を1以上9以下の整数とするとき，坂の傾斜角 ∠DCP の大きさについて $n^\circ < \angle\mathrm{DCP} < n^\circ + 1^\circ$ を満たす n の値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

以下では，∠DCP の大きさは，ちょうど $\boxed{\text{シ}}$ ° であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC=7m, CD=4m であり，太陽高度は $\angle\mathrm{APB} = 45^\circ$ であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき $\mathrm{BE} = \boxed{\text{ス}} \times \boxed{\text{セ}}$ m であり $\mathrm{DE} = \left(\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{タ}} \times \boxed{\text{チ}}\right)$ m である。よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{ツ}}$ m であることがわかる。

$\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{DCP}}$	② $\cos\angle\mathrm{DCP}$
③ $\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{DCP}}$	④ $\tan\angle\mathrm{DCP}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\angle\mathrm{DCP}}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 10.4	① 10.7	② 11.0	③ 11.3	④ 11.6	⑤ 11.9

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は $\angle\mathrm{APB} = 42^\circ$ であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について，坂にある部分の長さは $\mathrm{CD} = \dfrac{\mathrm{AB} - \boxed{\text{テ}} \times \boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}} \times \boxed{\text{ト}}}$ m である。

AB= $\boxed{\text{ツ}}$ m として，これを計算することにより，この日の電柱の影について，坂にある部分の長さは，前回調べた 4m より約 1.2m だけ長いことがわかる。

$\boxed{\text{ト}}$ ～ $\boxed{\text{ニ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\cos\angle\mathrm{DCP}$	② $\tan\angle\mathrm{DCP}$
③ $\sin 42^\circ$	④ $\cos 42^\circ$	⑤ $\tan 42^\circ$

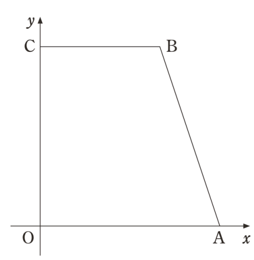
第 2 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕座標平面上に 4 点 O(0,0), A(6,0), B(4,6), C(0,6) を頂点とする台形 OABC がある。また，この座標平面上で，点 P，Q は次の**規則**に従って移動する。

規則

- P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する。
- Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして，C に到達した時点で移動を終了する。ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。
- P，Q は同時刻に移動を開始する。

この**規則**に従って P，Q が移動するとき，P，Q はそれぞれ A，C に同時刻に到達し，移動を終了する。以下において，P，Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。



参考図

(1) **開始時刻**から 1 秒後の △PBQ の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) **開始時刻**から 3 秒間の △PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ であり， 最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は

$\left(\boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}\right)$ 秒間である。

〔2〕高校の陸上部で長距離競技の選手として活躍する太郎さんは，長距離競技の公認記録が掲載されている Web ページを見つけた。この Web ページでは，各選手における公認記録のうち最も速いものが掲載されている。その Web ページに掲載されている，ある選手のある長距離競技での公認記録を，その選手のその競技でのベストタイムということにする。なお，以下の図や表については，ベースボール・マガジン社「陸上競技ランキング」の Web ページをもとに作成している。

(1) 太郎さんは，男子マラソンの日本人選手の 2022 年末時点でのベストタイムを調べた。その中で，2018 年より前にベストタイムを出した選手と 2018 年以降にベストタイムを出した選手に分け，それぞれにおいて速い方から 50 人の選手のベストタイムをデータ A，データ B とした。

ここでは，マラソンのベストタイムは，実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。例えば 2 時間 5 分 30 秒であれば，$60 \times 5 + 30 = 330$(秒) となる。

(i) 図 1 と図 2 はそれぞれ，階級の幅を 30 秒とした A と B のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

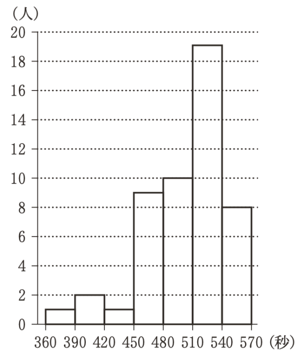


図 1　A のヒストグラム

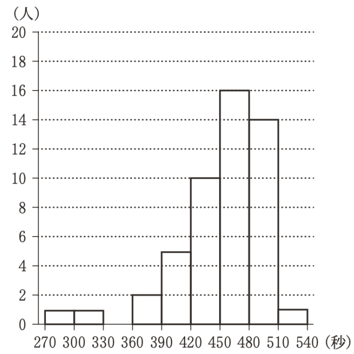


図 2　B のヒストグラム

図 1 から A の最頻値は階級 $\boxed{\text{サ}}$ の階級値である。また，図 2 から B の中央値が含まれる階級は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 270 以上 300 未満	① 300 以上 330 未満	② 330 以上 360 未満
③ 360 以上 390 未満	④ 390 以上 420 未満	⑤ 420 以上 450 未満
⑥ 450 以上 480 未満	⑦ 480 以上 510 未満	⑧ 510 以上 540 未満
⑨ 540 以上 570 未満		

(ii) 図 3 は，A，B それぞれの箱ひげ図を並べたものである。ただし，中央値を示す線は省いている。図 3 より次のことが読み取れる。ただし，A，B それぞれにおける，速い方から 13 番目の選手は，一人ずつとする。

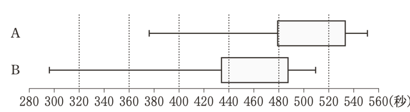


図 3　A と B の箱ひげ図

- B の速い方から 13 番目の選手のベストタイムは，A の速い方から 13 番目の選手のベストタイムより，およそ $\boxed{\text{ス}}$ 秒速い。
- A の四分位範囲から B の四分位範囲を引いた差の絶対値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の⓪ ～ ⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 5	① 15	② 25	③ 35	④ 45	⑤ 55

セ の解答群

⓪ 0 以上 20 未満	① 20 以上 40 未満	② 40 以上 60 未満
③ 60 以上 80 未満	④ 80 以上 100 未満	

(iii) 太郎さんは，A のある選手と B のある選手のベストタイムの比較において，その二人の選手のベストタイムが速いか遅いかとは別の観点でも考えるために，次の式を満たす z の値を用いて判断することにした。

式

（あるデータのある選手のベストタイム）＝
（そのデータの平均値）＋ z ×（そのデータの標準偏差）

二人の選手それぞれのベストタイムに対する z の値を比較し，その値の小さい選手の方が優れていると判断する。表 1 は，A，B それぞれにおける，速い方から 1 番目の選手（以下，1 位の選手）のベストタイムと，データの平均値と標準偏差をまとめたものである。

表 1　1 位の選手のベストタイム，平均値，標準偏差

データ	1 位の選手のベストタイム	平均値	標準偏差
A	376	504	40
B	296	454	45

式と表 1 を用いると，B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は
z=− ソ . タチ である。このことから，B の 1 位の選手のベストタイムは，平均値より標準偏差のおよそ ソ . タチ 倍だけ小さいことがわかる。A，B それぞれにおける，1 位の選手についての記述として，次の⓪ ～ ③のうち，正しいものは ツ である。

ツ の解答群

⓪ ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。
① ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。
② ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。
③ ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。

(2) 太郎さんは，マラソン，10000m，5000m のベストタイムに関連がないかを調べることにした。そのために，2022 年末時点でのこれら 3 種目のベストタイムをすべて確認できた日本人男子選手のうち，マラソンのベストタイムが速い方から 50 人を選んだ。図 4 と図 5 はそれぞれ，選んだ 50 人についてのマラソンと 10000m のベストタイム，5000m と 10000m のベストタイムの散布図である。ただし，5000m と 10000m のベストタイムは秒単位で表し，マラソンのベストタイムは (1) の場合と同様，実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

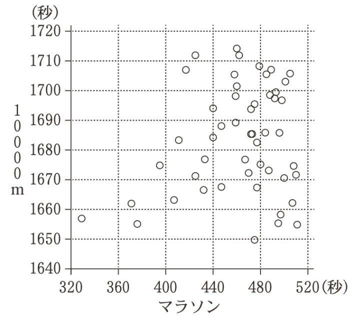


図 4　マラソンと 10000 m の散布図

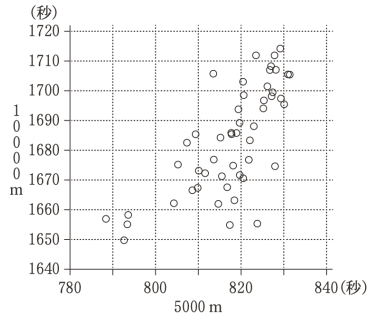


図 5　5000 m と 10000 m の散布図

次の (a), (b) は，図 4 と図 5 に関する記述である。

(a) マラソンのベストタイムの速い方から 3 番目までの選手の 10000m のベストタイムは，3 選手とも 1670 秒未満である。

(b) マラソンと 10000m の間の相関は，5000m と 10000m の間の相関より強い。

(a)，(b) の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

第 3 問　(選択問題)(配点 20)

箱の中にカードが 2 枚以上入っており，それぞれのカードにはアルファベットが 1 文字だけ書かれている。この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。

(1) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 2 枚入っている場合を考える。

以下では，2 以上の自然数 n に対し，n 回の試行で A，B がそろっているとは，n 回の試行で $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出されることを意味する。

(i) 2 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii) 3 回の試行で A，B がそろっている確率を求める。例えば，3 回の試行のうち $\boxed{\text{A}}$ を 1 回，$\boxed{\text{B}}$ を 2 回取り出す取り出し方は 3 通りあり，それらをすべて挙げると右のようになる。このように考えることにより，3 回の試行で A，B がそろっている取り出し方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りあることがわかる。よって，3 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2^3}$ である。

1 回目	2 回目	3 回目
$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$

(iii) 4 回の試行で A，B がそろっている取り出し方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある。よって，4 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている場合を考える。

以下では，3 以上の自然数 n に対し，n 回目の試行で初めて A，B，C がそろうとは，n 回の試行で $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

(i) 3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。よって，3 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{3^3}$ である。

(ii) 4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率を求める。4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は，(1) の (ii) を振り返ることにより，$3 \times \boxed{\text{ウ}}$ 通りあることがわかる。よって，4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(iii) 5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある。よって，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{3^5}$ である。

(3) 箱の中に，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている場合を考える。

以下では，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろうとは，6 回の試行で$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$のうちいずれか 1 枚が 6 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

また，3 以上 5 以下の自然数 n に対し，6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろうとは，6 回の試行のうち 1 回目から n 回目の試行で$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，$\boxed{\text{D}}$は 1 回も取り出されず，かつ$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて B，C，D だけがそろうなども同様に定める。

太郎さんと花子さんは，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率について考えている。

> 太郎：例えば，5 回目までに$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ 6 回目に初めて$\boxed{\text{D}}$が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。
>
> 花子：それなら，初めて A，B，C だけがそろうのが，3 回目のとき，4 回目のとき，5 回目のときで分けて考えてみてはどうかな。

6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方が $\boxed{\text{ク}}$ 通りであることに注意すると，「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて$\boxed{\text{D}}$が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{スセ}}$ 通りあることがわかる。同じように考えると，「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて$\boxed{\text{D}}$が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{ソタ}}$ 通りあることもわかる。

以上のように考えることにより，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ であることがわかる。

第 4 問　(選択問題)(配点 20)

T3，T4，T6 を次のようなタイマーとする。

T3：3 進数を 3 桁表示するタイマー　　T4：4 進数を 3 桁表示するタイマー

T6：6 進数を 3 桁表示するタイマー

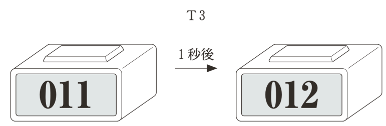
なお，n 進数とは n 進法で表された数のことである。

これらのタイマーは，すべて次の**表示方法**に従うものとする。

表示方法

(a) スタートした時点でタイマーは 000 と表示されている。
(b) タイマーは，スタートした後，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻る。
(c) タイマーは表示が 000 に戻った後も，(b) と同様に，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示される最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻るという動作を繰り返す。

例えば，T3 はスタートしてから 3 進数で $12_{(3)}$ 秒後に 012 と表示される。その後，222 と表示された 1 秒後に表示が 000 に戻り，その $12_{(3)}$ 秒後に再び 012 と表示される。



参考図

(1) T6 は，スタートしてから 10 進数で 40 秒後に $\boxed{\text{アイウ}}$ と表示される。
T4 は，スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$ 秒後に $\boxed{\text{エオカ}}$ と表示される。

(2) T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{キク}}$ 秒後であり，その後も $\boxed{\text{キク}}$ 秒ごとに表示が 000 に戻る。
同様の考察を T6 に対しても行うことにより，T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{ケコサシ}}$ 秒後であることがわかる。

(3) 0 以上の整数 ℓ に対して，T4 をスタートさせた ℓ 秒後に T4 が 012 と表示されることと，「ℓ を $\boxed{\text{スセ}}$ で割った余りが $\boxed{\text{ソ}}$ であること」は同値である。ただし，$\boxed{\text{スセ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ は 10 進法で表されているものとする。
T3 についても同様の考察を行うことにより，次のことがわかる。
T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とするとき，m は 10 進法で $\boxed{\text{タチツ}}$ と表される。
また，T4 と T6 の表示に関する記述として，次の⓪ ～ ③のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ T4 と T6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より前に初めて両方が同時に 012 と表示される。
① T4 と T6 を同時にスタートさせてから，ちょうど m 秒後に初めて両方が同時に 012 と表示される。
② T4 と T6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より後に初めて両方が同時に 012 と表示される。
③ T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

図 1 のように，平面上に 5 点 A，B，C，D，E があり，線分 AC，CE，EB，BD，DA によって，星形の図形ができるときを考える。線分 AC と BE の交点を P，AC と BD の交点を Q，BD と CE の交点を R，AD と CE の交点を S，AD と BE の交点を T とする。
ここでは $AP : PQ : QC = 2 : 3 : 3$，$AT : TS : SD = 1 : 1 : 3$ を満たす星形の図形を考える。
以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

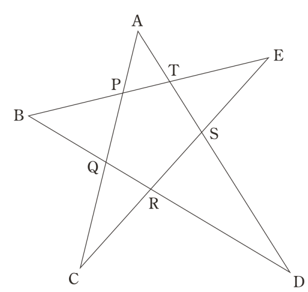


図 1

(1) △AQD と直線 CE に着目すると $\dfrac{QR}{RD} \cdot \dfrac{DS}{SA} \cdot \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{CQ} = 1$ が

成り立つので $\mathrm{QR}:\mathrm{RD}=$ イ : ウ となる。また，△AQD と直線 BE に着目すると $\mathrm{QB}:\mathrm{BD}=$ エ : オ となる。したがって $\mathrm{BQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RD}=$ エ : イ : ウ となることがわかる。

ア の解答群

⓪ AC	① AP	② AQ	③ CP	④ PQ

(2) 5 点 P，Q，R，S，T が同一円周上にあるとし，AC=8 であるとする。

(i) 5 点 A，P，Q，S，T に着目すると，AT:AS=1:2 より $\mathrm{AT}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに，5 点 D，Q，R，S，T に着目すると $\mathrm{DR}=4\sqrt{3}$ となることがわかる。

(ii) 3 点 A,B,C を通る円と点 D の位置関係を，次の構想に基づいて調べよう。

構想

線分 AC と BD の交点 Q に着目し，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{CQ}$ と $\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{DQ}$ の大小を比べる。

まず，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{CQ}=5\cdot3=15$ かつ $\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{DQ}=$ キク であるから

$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{CQ}$ ケ $\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{DQ}$…① が成り立つ。また，3 点 A，B，C を通る円と直線 BD との交点のうち，B と異なる点を X とすると $\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{CQ}$ コ $\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{XQ}$…② が成り立つ。①と②の左辺は同じなので，①と②の右辺を比べることにより，XQ サ DQ が得られる。したがって，点 D は 3 点 A，B，C を通る円の シ にある。

ケ ～ サ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

シ の解答群

⓪ 内部	① 周上	② 外部

(iii) 3 点 C，D，E を通る円と 2 点 A，B との位置関係について調べよう。この星形の図形において，さらに $\mathrm{CR}=\mathrm{RS}=\mathrm{SE}=3$ となることがわかる。したがって，点 A は 3 点 C，D，E を通る円の ス にあり，点 B は 3 点 C，D，E を通る円の セ にある。

ス ， セ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 内部	① 周上	② 外部

数学II・数学B (60 分, 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕(1) $k>0,\ k\neq1$ とする。関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

(i) $y=\log_3 x$ のグラフは点 $\left(27, \boxed{\text{ア}}\right)$ を通る。また，$y=\log_2\dfrac{x}{5}$ のグラフは点 $\left(\boxed{\text{イウ}}, 1\right)$ を通る。

(ii) $y=\log_k x$ のグラフは, k の値によらず定点 $\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る。

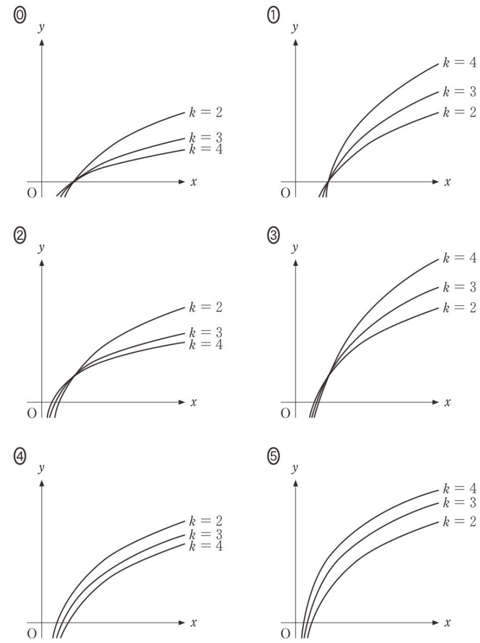
(iii) $k=2,3,4$ のとき,

$y=\log_k x$ のグラフの概形は カ

$y=\log_2 kx$ のグラフの概形は キ

である。

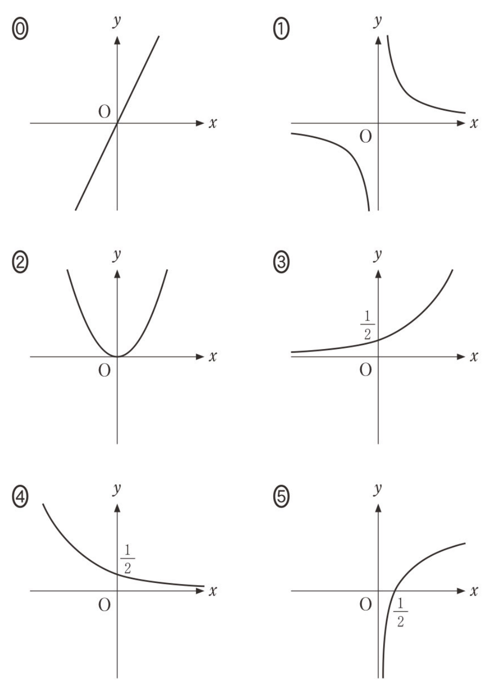
$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。



(2) $x>0,\ x \neq 1,\ y>0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

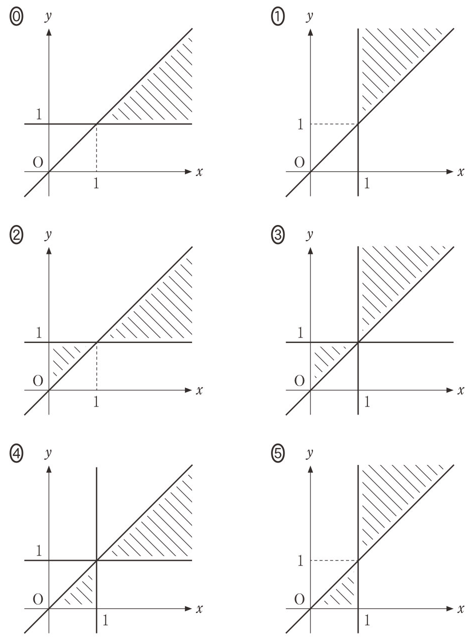
(i) 座標平面において, 方程式 $\log_x y=2$ の表す図形を図示すると, $\boxed{\text{ク}}$ の $x>0$, $x \neq 1,\ y>0$ の部分となる。

$\boxed{\text{ク}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。



(ii) 座標平面において, 不等式 $0<\log_x y<1$ の表す領域を図示すると, $\boxed{\text{ケ}}$ の斜線部分となる。ただし, 境界（境界線）は含まない。

$\boxed{\text{ケ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪〜⑤ のうちから一つ選べ。



〔2〕 $S(x)$ を x の 2 次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$, 余りを $U(x)$ とする。ただし, $S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$, $S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,i$ である。

また, $T(x) = \boxed{\text{ス}}\,x - \boxed{\text{セ}}$, $U(x) = \boxed{\text{ソタ}}$ である。

(2) 方程式 $S(x) = 0$ は異なる二つの解 α, β をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から, 定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき, $\boxed{\text{チ}}$ 。したがって, 余りが定数になるとき, $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{チ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪〜③ のうちから一つ選べ。

⓪ $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから, $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また, $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから, $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる

① $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから, $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる

② $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから, $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また, $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから, $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる

③ $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから, $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $T(\alpha) = T(\beta)$	① $P(\alpha) = P(\beta)$
② $T(\alpha) \neq T(\beta)$	③ $P(\alpha) \neq P(\beta)$

(ii) 逆に $\boxed{ツ}$ が成り立つとき, 余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから, m, n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。$P(x)$ を $S(x)$, $T(x)$, m, n を用いて表すと, $P(x) = \boxed{テ}$ となる。この等式の x に α, β をそれぞれ代入すると $\boxed{ト}$ となるので, $\boxed{ツ}$ と $\alpha \neq \beta$ より $\boxed{ナ}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x)+mx+n$
② $(mx+n)S(x)+T(x)$	③ $(mx+n)T(x)+S(x)$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $P(\alpha) = T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = T(\beta)$
① $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$
② $P(\alpha) = (m\alpha+n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = (m\beta+n)T(\beta)$
③ $P(\alpha) = P(\beta) = 0$
④ $P(\alpha) \neq 0$ かつ $P(\beta) \neq 0$

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $m \neq 0$	① $m \neq 0$ かつ $n = 0$
② $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$	③ $m = 0$
④ $m = n = 0$	⑤ $m = 0$ かつ $n \neq 0$
⑥ $n = 0$	⑦ $n \neq 0$

(i), (ii) の考察から, 方程式 $S(x) = 0$ が異なる二つの解 α, β をもつとき, $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{ツ}$ であることは同値である。

(3) p を定数とし, $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$, $S(x) = x^2 - x - 2$ の場合を考える。$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき, $p = \boxed{ニヌ}$ となり, その余りは $\boxed{ネノ}$ となる。

第 2 問 (必答問題)(配点 30)

m を $m > 1$ を満たす定数とし, $f(x) = 3(x-1)(x-m)$ とする。また, $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y = f(x)$ と $y = S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1) $m = 2$ のとき, すなわち, $f(x) = 3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i) $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x \left(3t^2 - \boxed{ウ}\,t + \boxed{エ}\right) dt \\ &= x^3 - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}x^2 + \boxed{キ}\,x \end{aligned}$$

であるから

$x=$ $\boxed{\text{ク}}$ のとき, $S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり

$x=$ $\boxed{\text{サ}}$ のとき, $S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる。

(iii) $f(3)$ と一致するものとして, 次の⓪〜④のうち, 正しいものは $\boxed{\text{ス}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $S(3)$
① 2 点 $(2, S(2))$, $(4, S(4))$ を通る直線の傾き
② 2 点 $(0, 0)$, $(3, S(3))$ を通る直線の傾き
③ 関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3, S(3))$ における接線の傾き
④ 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(3, f(3))$ における接線の傾き

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で, 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1, $1 \leqq x \leqq m$ の範囲で, 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき, $S_1=$ $\boxed{\text{セ}}$, $S_2=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$S_1=S_2$ となるのは $\boxed{\text{タ}}$ $=0$ のときであるから, $S_1=S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{チ}}$ である。また, $S_1>S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

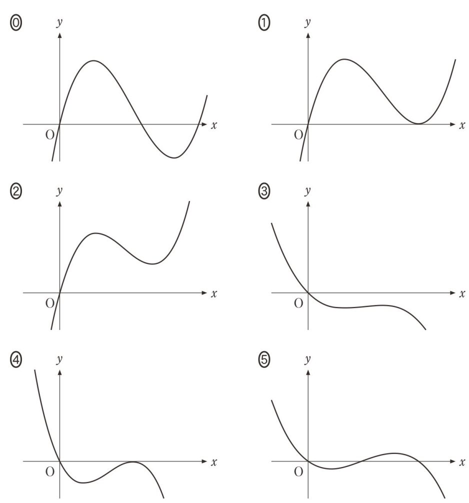
$\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$　① $\displaystyle\int_0^m f(x)dx$　② $\displaystyle\int_1^m f(x)dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}dx$　④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}dx$　⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}dx$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$　① $\displaystyle\int_0^m f(x)dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)dx$　③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_0^m f(x)dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m f(x)dx$　⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_0^m f(x)dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)dx+\int_1^m f(x)dx$

$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ については, 最も適当なものを, 次の⓪〜⑤のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。



(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=$ $\boxed{\text{テ}}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)dx = \int_{m}^{\boxed{\text{ト}}} f(x)dx \cdots ①$$

が成り立ち，$M=$ $\boxed{\text{テ}}$ とおくと $0<q \leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M} \{-f(x)\}dx = \int_{M}^{\boxed{\text{ナ}}} \{-f(x)\}dx \cdots ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α, β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S\left(\boxed{\text{ト}}\right) = \boxed{\text{ニ}}$$

$$2S(M) = \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p, S(1-p))$, $\left(\boxed{\text{ト}}, S\left(\boxed{\text{ト}}\right)\right)$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の ⓪〜⑤ のうち，最も適当なものは $\boxed{\text{ネ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ m	① $\frac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\frac{m+1}{2}$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。
① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。
② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。
④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

第3問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表 (本誌割愛) を用いてもよい。また，ここでの**晴れ**の定義については，気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。

(1) 太郎さんは，自分が住んでいる地域において，日曜日に**晴れ**となる確率を考えている。

晴れの場合は 1，**晴れ**以外の場合は 0 の値をとる確率変数を X と定義する。また，$X=1$ である確率を p とすると，その確率分布は表 1 のようになる。

表 1

X	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

この確率変数 X の平均 (期待値) を m とすると $m=$ $\boxed{ア}$ となる。

太郎さんは，ある期間における連続した n 週の日曜日の天気を，表 1 の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし，それらの X を確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ で表すことにした。そして，その標本平均 $\overline{X}$ を利用して，母平均 m を推定しようと考えた。実際に $n=300$ として**晴れ**の日数を調べたところ，表 2 のようになった。

表 2

天　気	日　数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

母標準偏差を σ とすると，$n=300$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \boxed{イ}\right)$ に従う。

一般に，母標準偏差 σ がわからないとき，標本の大きさ n が大きければ，σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。S は

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_n}^2)-\boxed{ウ}}$$

で計算できる。ここで，${X_1}^2=X_1,\ {X_2}^2=X_2,\ \cdots,\ {X_n}^2=X_n$ であることに着目し，右辺を整理すると，$S=\sqrt{\boxed{エ}}$ と表されることがわかる。よって，表 2 より，大きさ $n=300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間は $\boxed{オ}$ となる。

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ p　① p^2　② $1-p$　③ $(1-p)^2$

$\boxed{イ}$ の解答群

⓪ σ　① σ^2　② $\dfrac{\sigma}{n}$　③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$　④ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\overline{X}$　① $(\overline{X})^2$　② $\overline{X}(1-\overline{X})$　③ $1-\overline{X}$

$\boxed{オ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0.201 \leqq m \leqq 0.299$　① $0.209 \leqq m \leqq 0.291$
② $0.225 \leqq m \leqq 0.250$　③ $0.225 \leqq m \leqq 0.275$
④ $0.247 \leqq m \leqq 0.253$　⑤ $0.250 \leqq m \leqq 0.275$

(2) ある期間において，「ちょうど 3 週続けて日曜日の天気が**晴れ**になること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では，連続する k 週の日曜日の天気について，(1) の太郎さんが考えた確率変数のうち $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_k$ を用いて調べる。ただし，k は 3 以上 300 以下の自然数とする。$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_k$ の値を順に並べたときの 0 と 1 からなる列において，「ちょうど三つ続けて 1 が現れる部分」を A とし，A の個数を確率変数 U_k で表す。例えば，$k=20$ とし，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{20}$ の値を順に並べたとき

$$1,1,1,1,0,\underbrace{1,1,1}_{\text{A}},0,0,1,1,1,1,1,0,0,\underbrace{1,1,1}_{\text{A}}$$

であったとする。この例では, 下線部分は A を示しており, 1 が四つ以上続く部分は A とはみなさないので, $U_{20}=2$ となる。

$k=4$ のとき, X_1, X_2, X_3, X_4 のとり得る値と, それに対応した U_4 の値を書き出すと, 表 3 のようになる。

表 3

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

ここで, U_k の期待値を求めてみよう。(1) における p の値を $p=\dfrac{1}{4}$ とする。

$k=4$ のとき, U_4 の期待値は $E(U_4)=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{128}$ となる。

$k=5$ のとき, U_5 の期待値は $E(U_5)=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{1024}$ となる。

4 以上の k について, k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると, 座標平面上の点 $(4,E(U_4))$, $(5,E(U_5))$, $\cdots$, $(300,E(U_{300}))$ は一つの直線上にあることがわかる。この事実によって

$$E(U_{300})=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となる。

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+1}-a_n=14\quad(n=1,2,3,\cdots)$ を満たすとする。

$a_1=10$ のとき, $a_2=\boxed{\text{アイ}}$, $a_3=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は, 初項 a_1 を用いて $a_n=a_1+\boxed{\text{オカ}}(n-1)$ と表すことができる。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が $2b_{n+1}-b_n+3=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を満たすとする。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は, 初項 b_1 を用いて

$$b_n=\left(b_1+\boxed{\text{キ}}\right)\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)^{n-1}-\boxed{\text{コ}}$$

と表すことができる。

(3) 太郎さんは $(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$ $(n=1,2,3,\cdots)\cdots$① を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした。

(i) ● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1=5$ のとき, $c_2=\boxed{\text{サ}}$ である。

● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$ のとき, $c_2=\boxed{\text{シス}}$, $c_1=\boxed{\text{セソ}}$ である。

(ii) 太郎さんは, 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$ となる場合について考えている。

$c_3=-3$ のとき, c_4 がどのような値でも $(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0$ が成り立つ。

● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$, $c_4=5$ のとき

$c_1=\boxed{\text{セソ}}$, $c_2=\boxed{\text{シス}}$, $c_3=-3$, $c_4=5$, $c_5=\boxed{\text{タ}}$

である。

● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$, $c_4=83$ のとき

$c_1=\boxed{\text{セソ}}$, $c_2=\boxed{\text{シス}}$, $c_3=-3$, $c_4=83$, $c_5=\boxed{\text{チツ}}$

である。

(iii) 太郎さんは (i) と (ii) から, $c_n=-3$ となることがあるかどうかに着目し, 次の**命題 A** が成り立つのではないかと考えた。

> **命題 A** 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1\neq-3$ であるとする。このとき, すべての自然数 n について $c_n\neq-3$ である。

命題 A が真であることを証明するには, **命題 A** の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について, $\boxed{\text{テ}}$

を示せばよい。実際, このようにして**命題 A** が真であることを証明できる。

テ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～④ のうちから一つ選べ。

⓪ $c_2 \neq -3$ かつ $c_3 \neq -3$ であること
① $c_{100} \neq -3$ かつ $c_{200} \neq -3$ であること
② $c_{100} \neq -3$ ならば $c_{101} \neq -3$ であること
③ $n=k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと
④ $n=k$ のとき $c_n = -3$ が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のときも $c_n = -3$ が成り立つこと

(iv) 次の (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) は, 数列 $\{c_n\}$ に関する命題である。

(Ⅰ) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。
(Ⅱ) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。
(Ⅲ) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) の真偽の組合せとして正しいものは ト である。

ト の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(Ⅱ)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(Ⅲ)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A$(2,7,-1)$, B$(3,6,0)$, C$(-8,10,-3)$, D$(-9,8,-4)$ がある。A, B を通る直線を ℓ_1 とし, C, D を通る直線を ℓ_2 とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イウ}}, \boxed{\text{エ}}\right)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 花子さんと太郎さんは, 点 P が ℓ_1 上を動くとき, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となる P の位置について考えている。

P が ℓ_1 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 s があり, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる。このことについて, 花子さんと太郎さんが話をしている。

花子 : $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$ が最小となる s の値を求めればよいね。
太郎 : $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるときの直線 OP と ℓ_1 の関係に着目してもよさそうだよ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \boxed{\text{キ}}\, s^2 - \boxed{\text{クケ}}\, s + \boxed{\text{コサ}}$ である。

また, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるとき, 直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると シ が成り立つことがわかる。花子さんの考え方でも, 太郎さんの考え方でも, $s = \boxed{\text{ス}}$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となることがわかる。

カ の解答群

⓪ $s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
① $s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
② $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
③ $(1-2s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
④ $(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

シ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} > 0$	① $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$
② $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} < 0$	③ $\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert$
④ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$
⑥ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\rvert\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert$	

(3) 点 P が ℓ_1 上を動き, 点 Q が ℓ_2 上を動くとする。このとき, 線分 PQ の長さが最小になる P の座標は $\left(\boxed{\text{セソ}}, \boxed{\text{タチ}}, \boxed{\text{ツテ}}\right)$, Q の座標は $\left(\boxed{\text{トナ}}, \boxed{\text{ニヌ}}, \boxed{\text{ネノ}}\right)$ である。