

述語論理の自然な導入

市川工業高等学校 氏家 悟

1 はじめに

2018 年、磯辺高校の数学 III の授業で述語論理を扱い、それを翌年の関東甲信静数学教育研究千葉大会で発表した。そこで使用した要旨は本誌に掲載されたが、「1 ページ」という制約のため、教材や詳しい内容まで掲載できなかった [1]。本稿では教材の一部や、発表内容、さらに当時、触れられなかったことを加筆した。

論理は数学 I の単位だけではなく、あらゆる場面で指導する機会があると考えている。そのため様々な場面で、必要条件、十分条件、対偶、反例などの語を用いて、当時のセンター試験対策を行っていた。¹⁾

数学 III は、場面によっては述語論理の「すべて、ある」を用いたいときもあるため、その準備に命題論理（数学 I）の復習をして、述語論理にも触れさせてみた。

2 命題論理

まず、数学 I の復習としてプリントの 1～3 番で、命題論理の用語「かつ」「または」「否定」の説明と、それらと集合との関係、および Venn 図を用いた確認をし復習をした。

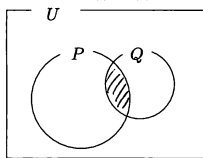
条件 p, q について、集合 $P = \{x \mid x \text{ は条件 } p \text{ を満たす}\}$ 、集合 $Q = \{x \mid x \text{ は条件 } q \text{ を満たす}\}$ とする。(全体集合 U)

1. 2 つの条件 p, q を同時に満たす条件について。

(1) この条件は「 p かつ q 」(英語は p and q 、記号論理学では $p \wedge q$ と書き、論理積という。)である。

(2) $\{x \mid x \text{ は } p \text{ かつ } q \text{ を満たす}\} = P \cap Q$ なので、集合 P, Q の 共通部分 である。

Venn 図に斜線を書き入れよ。



2. 2 つの条件 p, q の少なくとも 1 つを満たす条件について。

(1) この条件は「 p または q 」(英語は p or q 、記号論

4. 全体集合を $U = \{x \mid x \text{ は 1 桁の自然数}\}$ とする。

条件 p : 「偶数である。」、条件 q : 「6 の約数である。」

としたとき、内包的記法(要素の条件を述べて表す)で

書かれた集合

$P = \{x \mid x \text{ は条件 } p \text{ を満たす}\}$ 、 $Q = \{x \mid x \text{ は条件 } q \text{ を満たす}\}$

について、次の集合をすべて外延的記法(要素をすべて

書き並べて表す)で表せ。

(1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(2) $P = \{2, 4, 6, 8\}$

(3) $Q = \{1, 2, 3, 6\}$

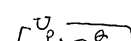
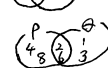
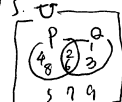
(4) $\{x \mid x \text{ は条件「} p \text{ かつ } q \text{」を満たす}\}$

$= \{2, 6\}$

(5) $\{x \mid x \text{ は条件「} p \text{ または } q \text{」を満たす}\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(6) $\{x \mid x \text{ は条件「} p \text{ かつ } q \text{」を満たす}\}$



問題 4 で実際に「かつ」「または」「否定」のすべてを組み合わせた集合を作らせた。そして、ド・モルガンの法則の確認や、それら部分集合の包含関係から「ならば」の形の命題を作る練

¹⁾ 共通テスト受験を想定しない生徒ならば、論理の流れを意識してもらうために、用語にこだわらないようにしている。

習である。

(15) 上記の中で、同値な条件 (集合が等しい) を挙げ、
de Morgan の法則を確認めよ。

$$(6) = (3) \text{ より } \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

$$(7) = (11) \text{ より } \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

(16) 上記の中で、包含関係が成り立つものを 2 つ挙げよ。

例: $\overline{P \cap Q} = \{1, 3\}$ より, $\overline{P \cap Q} \subset \overline{P}$

$P \subset P \cup Q$	$\overline{P \cap Q} \subset \overline{P}$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P \cap Q} \subset \overline{P \cap Q}$	$\overline{P \cap Q} \subset \overline{P}$
$Q \subset P \cup Q$	$\overline{P \cap Q} \subset \overline{Q}$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P \cap Q} \subset \overline{P \cap Q}$	$\overline{P \cap Q} \subset \overline{Q}$
$P \cap Q \subset P$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{P}$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P \cap Q} \supset \overline{P \cap Q}$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{P}$
$P \cap Q \subset Q$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{Q}$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P \cap Q} \supset \overline{P \cap Q}$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{Q}$
$P \cap Q \subset P \cup Q$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{P \cup Q}$	$\overline{P \cap Q} = \overline{P \cap Q} \supset \overline{P \cap Q}$	$\overline{P \cap Q} \supset \overline{P \cup Q}$

(17) その包含関係を、「ならば」を使って書き換えよ。

例: $\overline{p} \wedge q$ ならば $\overline{p}$ より,

1桁の自然数について、「(偶数でない, かつ, 6の約数) ならば 偶数でない」

$p \Rightarrow p \vee q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$
$q \Rightarrow p \vee q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
$p \wedge q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
$p \wedge q \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

否定 $\neg$ と $\Rightarrow$ の関係

プリントでは、かつ $\wedge$ 、または $\vee$ は論理記号を用いたが、否定を $\neg p$ 、 $\overline{p}$ の 2 種類を使ってしまった。²⁾

続いて、5 番では実数の部分集合の包含関係から、対偶や、必要条件、十分条件についての練習をさせた。(1) はすべての組み合わせで 24 個あり、真の命題は 6 個あった。

5. 実数 x (全体集合が実数 $\mathbb{R}$) について、

条件 p : 「 $x > 0$ 」

条件 q : 「 $x > 3$ 」

条件 r : 「 $x \leq 10$ 」

とする。

(1) つぎの命題の真偽を述べよ。(包含関係を調べる。)

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$p \Rightarrow r$$

$$q \Rightarrow p$$

$$r \Rightarrow q$$

$$r \Rightarrow p$$

(2) 上記、真になる命題のうち、互いに対偶になっているものを挙げよ。

$$q \Rightarrow p \text{ と } \overline{p} \Rightarrow \overline{q} \quad \overline{q} \Rightarrow \overline{r} \text{ と } \overline{r} \Rightarrow \overline{q}$$

$$\overline{p} \Rightarrow \overline{r} \text{ と } \overline{r} \Rightarrow \overline{p}$$

(3) 上記、真になる命題にのどれか一つについて、

「 $x > 10$ は、 $x > 0$ であるための十分条件である。」

「 $x > 0$ は、 $x > 10$ であるための必要条件である。」

のように、言い換えよ。

$p \Rightarrow q$	($x > 3$ は、 $x > 0$ であるための十分条件 $x > 0$ は、 $x > 3$ であるための必要条件)	sufficient condition necessary condition
$p \Rightarrow \overline{q}$	($x \leq 0$ は、 $x \leq 3$ であるための十分条件 $x \leq 3$ は、 $x \leq 0$ であるための必要条件)	sufficient condition necessary condition
$\overline{p} \Rightarrow r$	($x \leq 3$ は、 $x \leq 10$ であるための十分条件 $x \leq 10$ は、 $x \leq 3$ であるための必要条件)	sufficient condition necessary condition

そして、命題論理のプリントの最後に整数問題の例題で、必要十分条件や同値の復習をした。

6. 整数 n について、 n が偶数ならば、 n^2 も偶数である。

(1) 全体集合は何か。

整数

(2) n が偶数であることは、 n^2 が偶数であるための
十分条件

n^2 が偶数であることは、 n が偶数であるための
必要条件

(3) この命題は逆も成り立つので、

n が偶数であることは、 n^2 が偶数であるための

必要十分条件 necessary and sufficient condition

n が偶数であることと n^2 が偶数であることは、

同値である。
equivalent

この辺の話題は、以前、本誌に投稿した [2]。

3 真理値表

次のプリントでは、真理値表を扱った。1 番は「かつ」「または」「否定」を、ほぼすべてを組み合わせた命題の真理値表である。生徒は 2 年時の教科「情報」で、論理回路について学び、1 ビットの加算回路などを扱ったので、その復習でもある。漢字は大変なので、真 true を「T」、偽 false を「F」と記号化した³⁾。

²⁾ あとで気づいたが、まあ、理系選択の生徒が対象だから大丈夫だろうと。

³⁾ 「情報」では真を 1、偽を 0 と記号化していたが。

1. 条件 p, q 次の条件の真理値表を完成させよ.

(1) p の否定 $\neg p$ とその否定 $\neg \neg p$

p	$\neg p$	$\neg \neg p$
偽	真	偽
真	偽	真

二重否定は 肯定. これを 排中律
Law of excluded middle という.

(2) 「 p かつ q 」とその否定 $\neg(p \wedge q)$ De Morgan

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
偽	偽	F	T
偽	真	F	T
真	偽	F	T
真	真	T	F

(3) 「 p または q 」とその否定 $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
偽	偽	F	T
偽	真	T	F
真	偽	T	F
真	真	T	F

(7) 「 $\neg p$ または q 」

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$
偽	偽	T	T	T
偽	真	T	F	T
真	偽	F	T	F
真	真	F	F	T

(8) 「 p または $\neg q$ 」

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$
偽	偽	T	T	T
偽	真	T	F	F
真	偽	F	T	T
真	真	F	F	T

(9) 「 $\neg p$ または $\neg q$ 」

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
偽	偽	T	T	T
偽	真	T	F	T
真	偽	F	T	T
真	真	F	F	F

そして, (10) で同値や (11) で否定になっている命題を調べさせた. (10) はド・モルガンの法則でもある.

(10) 上記の条件のうち同値な条件 (真理値表が同じ) は
どれか. (1) (3) (6)
(2) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (4) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

(11) 上記の条件のうち互いに否定の関係になっている
条件 (真偽が反転) はどれか. (5) (7)
(4) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee \neg q$ (6) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

そして, 2 番は「ならば」についての確認.

2. $p \Rightarrow q$ (p ならば q) の真偽について.

(1) 結論 q が真のときは, 仮定 p の真偽にかかわらず「真」と決める. (推論の羅列で「証明」をすることはできないが.)

(2) たとえば, 実数 x について, つねに $x^2 \geq 0$ である. (恒真)

このとき, 「 $x^2 < 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$ 」, 「 $1 + 2 = -5 \Rightarrow x^2 \geq 0$ 」, 「日本の人口は 40 人 $\Rightarrow x^2 \geq 0$ 」
などすべて 真

「 $x^2 < 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」も結論が真なので 真 ということに決める.

(3) 仮定 p と結論 q が, どちらも偽のときは, 仮定と結論の真理値が一致しているから, 「真」と決める.

(4) たとえば, 「 $x^2 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 123$ 」, 「 $1 = 2 \Rightarrow 3 > 5$ 」などすべて仮定と結論の真理値がどちらも偽で一致するので, 真

(5) 仮定 p が真で結論 q が偽のときだけ, $p \Rightarrow q$ は 偽 となる.

(6) まとめると,

p	q	$p \Rightarrow q$
偽	偽	T
偽	真	T
真	偽	F
真	真	T

(7) 試験問題 p , 答え q に対して, $p \Rightarrow q$ の真偽を得点と考えると...

問題 p	答え q	$p \Rightarrow q$ の得点
誤	誤	100 点
誤	正	100 点
正	誤	0 点
正	正	100 点

3. $p \Rightarrow q$ とその否定 $\neg(p \Rightarrow q)$ について.

(1) 真理値表を完成させよ.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
-----	-----	-------------------	-------------------------

高校の数学では「包含関係」で十分であるが, 真理値表と述語論理の準備のために確認させた.

このとき, プリントの 2(2) で「 $p \Rightarrow q$ 」の条件 q に, 真の命題「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」を代入し

ているが、条件のところに命題を代入することについて、2019年8月の数学セミナーの「2つの“ならば”」という記事で、次のようにその混乱に触れていた [3]。

“ならば”(含意)という言葉は、本来、法則や推論を表す言葉ですが、数理論理学の中で意味の異なる新しい“ならば”が生まれました。

つまり数理論理学では、いくつかのトートロジーを命題論理の公理として採用していて、例えば、ヒルベルト&アッケルマンの公理系のひとつの公理 $p \Rightarrow p \vee q$ の変項⁴⁾ p, q は「任意の論理式」のため、条件でも命題でもよいことになっている。そのことが、混乱の具体例であるとの指摘である。もちろん、形式化することによって証明が機械的になり、LISP⁵⁾ による不完全性定理の証明 [4]、といったことができるようになったりしたわけであるが。

プリント (7) の試験問題のアナロジーは好きである。これは 30 年以上前に同僚から教えてもらったもので、「正しい問題」に対して正答で得点、誤答で 0 点は当然として、問題が誤っていた(偽)場合は解答に無関係に得点を与える(真)のがふつうである。これが「ならば」の真偽のアナロジーになっている。

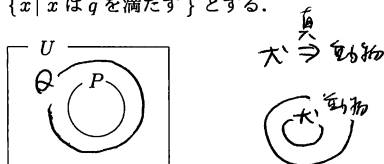
つづいて、「ならば」の否定について。

3. $p \Rightarrow q$ とその否定 $\neg(p \Rightarrow q)$ について。

(1) 真理値表を完成させよ。

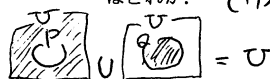
p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
偽	偽	T	F
偽	真	T	F
真	偽	F	T
真	真	T	F

(2) $p \Rightarrow q$ が真のとき、次の Venn 図に集合 Q を書け。ただし、 $P = \{x \mid x \text{ は } p \text{ を満たす}\}$, $Q = \{x \mid x \text{ は } q \text{ を満たす}\}$ とする。



(3) 1. (2)~(9) のなかで、

- $p \Rightarrow q$ と同値な(真理値表が一致する)条件はどれか。 (7) $\neg p \vee q$ 空集合



- $p \Rightarrow q$ と同値な条件を満たす集合を、上の Venn 図に斜線を書き入れよ。

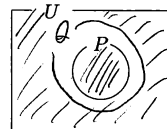


(4) 1. (2)~(9) のなかで、

- $\neg(p \Rightarrow q)$ と同値な(真理値表が一致する)条件はどれか。 (5) $p \wedge \neg q$

真偽

$p \Rightarrow q$ が真のとき、その否定 $\neg(p \Rightarrow q)$ と同値な条件を Venn 図を書け。



真偽 $p \wedge \neg q$ は $\emptyset$

- $p \Rightarrow q$ が真のとき、その否定 $\neg(p \Rightarrow q)$ の真偽は 偽 である。

- したがって、真の命題の集合は、全体集合 で、偽の命題の集合は、空集合 である。

$\neg(p \Rightarrow q)$ と同値な条件 $p \wedge \neg q$ は $p \Rightarrow q$ を証明するとき、背理法 Reductio ad absurdum の仮定に当たる。

確認させたのは、

- (2) 「 p ならば q 」が真のとき包含関係 $P \subset Q$ となる。
- (3) 「 p ならば q 」と「 $\neg p$ または q 」は同値。 $P \subset Q$ のとき、集合 $\overline{P} \cup Q$ は全体集合。
- (4) 「 p ならば q 」の否定と「 p かつ $\neg q$ 」は同値。そのとき、集合 $P \cap \overline{Q}$ は空集合。
- 真の命題の集合は全体集合、偽は空集合

このことから、「反例」や「背理法の仮定」が「 p かつ $\neg q$ 」であるといえる。

「 p ならば q 」の否定「 p ならば q 」を言葉で発した「 p ならば q でない」は部分否定「 p な

4) 「変数」と言わず「変項」というのは数理論理学では対象が「数」に限らないからである。

5) 関数型プログラミング言語の1つ。

らば $\bar{q}$ 」と区別がつかないので注意がいる。「ならば」の否定「 $\overline{p \text{ ならば } q}$ 」と同値な命題は、反例や背理法の仮定に用いる「 $p \text{ かつ } \bar{q}$ 」であるが、部分否定「 $p \text{ ならば } \bar{q}$ 」と同値な「 $\bar{p}$ または $\bar{q}$ 」を否定すると、「 $p \text{ かつ } q$ 」となり、反例や背理法の仮定と異なる。

この後、逆、裏、対偶の真理値表を作り対偶の真偽が一致すること、そして、 $\emptyset \subset P$ から「仮定が偽の命題はつねに真」となり、 $P \subset U$ (全体集合) から「結論が真の命題はつねに真」となることに整合することを確認させた。

4 身近な述語論理

述語論理は、意識せずともいろいろな場面に登場する。すぐに思いつくのは、恒等式（すべて）、方程式（存在）だろう。

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ は恒等式で、「任意」の x, y についても成り立つ。対して、 $x^2 + y^2 = 1$ は単位円である。つまり、恒等式 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ を満たす x, y は全体集合（座標平面）であり、 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす x, y は「すべて」ではなく、単位円上に「存在」する。

証明は「すべて」、反例は「存在」である。恒等式の単元での証明⁶⁾は、意識せずとも「すべて」について証明している。それに対し、「反例」の練習では、具体例を1つ上げるだけでよいといえる。

背理法の証明では、なにか、こねくりまわして、矛盾を導くことに違和感を感じることもあるようだ。というのも、数学の証明は普通「いつでも成り立つ」（つまり $\forall x$ ）ことを示しているのに対して、背理法の矛盾の指摘は極めて特殊なことをこじつけているように感じるだろう。これも、「反例は1つで示したことになる」と同様、具体的な特殊な矛盾が1つでもあれば $(\exists x)$ 、示したことになるのが背理法といえる。

5 述語論理の素朴な導入

以上の準備のもと、3枚目のプリントでは、まず包含関係で真となる不等式、偽となる不等式から述語論理の導入をした。最初に実施したのは、1996年度の東葛飾高校での授業である。

1. 命題 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ について、

(1) 集合の包含関係から、真偽は True である。

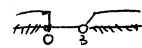
(2) それと同値な命題 $x > 3 \text{ ならば } x > 0$
「 $x \leq 3$ または $x > 0$ 」
をみたす集合は、全体集合 である。

(3) 真の命題の否定の真偽は False である。

(4) 否定 $\neg(x > 3 \Rightarrow x > 0)$ と同値な命題 $x > 3 \text{ かつ } (x \leq 0)$
「 $x > 3$ かつ $x \leq 0$ 」
をみたす集合は、空集合 である。

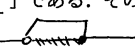
2. 命題 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ について、

(1) 同値な命題は「 $x \leq 0$ または $x > 3$ 」である。その集合を数直線に表せ。



(2) 集合の包含関係から、真偽は False であるから、その否定 $\neg(x > 0 \Rightarrow x > 3)$ の真偽は True である。

(3) 否定 $\neg(x > 0 \Rightarrow x > 3)$ と同値な命題は「 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」である。その集合を数直線に表せ。



この場合、真の命題にであるにもかかわらず、全体集合にならないし、偽の命題が空集合にならない。

1 番「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」は真の不等式で、真理集合は全体集合、否定命題は空集合となるこ

⁶⁾ この区別がつかないと、恒等式の証明を方程式のように移項を行い $0 = 0$ にしてしまう。

とが確かめられる。

2 番は 1 番の逆で「 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ 」は偽の不等式である。しかし、それと同値の「 $x \leq 0$ または $x > 3$ 」は偽であるのに空集合でない。偽の否定「 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」は真なので、全体集合となるはずが、ならない。

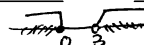
ここで、「すべて」「ある」といった量子子が必要となるのである⁷⁾。

3. 「すべての x 」, 「ある x 」のいずれかの述語を加えて、偽の命題 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ の否定「 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」が真になるようにせよ。

「ある x 」について、 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ を満たす。」



4. 「すべての x 」, 「ある x 」のいずれかの述語を加えて、 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ と同値な「 $x \leq 0$ または $x > 3$ 」が偽になるようにせよ。



「すべての x 」について、 $x \leq 0$ または $x > 3$ を満たす。」

3 番「すべて」を追加する全称導入（普遍汎化）で、偽の命題の否定を真にすることができ、4 番「ある」を追加する存在導入（存在汎化）で、真の命題の否定を偽にすることができた。

論理を学ぶと、どうしても天下りに用語が導入されて、難しさを感じるわけであるが、本来、人の言語から自然に使われるようになったのである。

論理に限らず、数学を学ぶときは「完成されたもの」を学ぶため、天下りに教え、覚えさせるのが効率的である。しかし自分は、「そこに至った当時の人の自然な思考」を生徒にも体験させたいと、日ごろから思っている [5]。

多項式の展開公式のように、「すべての」はふつうは記述しない。「すべて」について成り立つものはそれを省略でき、それを全称除去（普遍例化）という。これは論理の公理⁸⁾の 1 つ $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ であり、 $\forall$ で量化された束縛変項 x は、自由変項 a にできる。

存在導入（存在汎化） $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$ も公理に採用されている。

6. 命題「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」の真理値表。

x	$x > 3$	$x > 0$	$x > 3 \Rightarrow x > 0$
-7	F	F	T
2	F	T	T
10	T	T	T

したがって、命題「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」は $x \leq 3$ のときも含め、

「すべての実数 x について、 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」といえる。

7. 命題「 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ 」の真理値表。

x	$x > 0$	$x > 3$	$x > 0 \Rightarrow x > 3$
-7	F	F	T
2	T	F	F
10	T	T	T

したがって、命題「 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ 」が偽であるのは、「すべての x について成り立たないから」であり、「ある実数 $x = 2$ について、 $x > 0 \Rightarrow x > 3$ ではない。」が真といえる。

6 番の「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」では、 $x = -7$ を想定することはないが、 $x = -7$ でも真となり、実数全体で真となる命題である。6 番の逆の 7 番は特定の $x = 2$ が反例で成り立たないので、偽なのである。その偽の命題の否定は真であるが、9 番で 7 番の否定命題「 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」を真にする「ある」は省略できない。

9. 命題「(すべての x について) $x > 0 \Rightarrow x > 3$ 」が false なので、その否定「 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」を true にするため、「ある x について、 $x > 0$ かつ $x \leq 3$ 」のように補う。

これを真にする「ある x 」は省略できない。

かつ、または、否定、ならば の論理式を使う論理を命題論理 propositional logic という。

命題論理に述語「すべての～」「ある～」(量子子 quantifier ともうい)を加えた論理を、述語論理 predicate logic という。

このように存在除去（存在例化）は真偽が変わるため、ふつうはできず、具体的な数値 $x = 2$

⁷⁾ 変項を「すべて」「ある」で束縛することを量化という。

⁸⁾ ヒルベルト&アッケルマンの公理系

にすることで、「 $2 > 0$ かつ $2 \leq 3$ 」が真で、存在除去となる。

量子の導入の例。10 番は、不等式 $x > 0$ は条件だが、量子「すべて」「ある」を導入することで命題となる。11, 12 番が恒等式、方程式の例、13 番が全称除去の例。

10. $x > 0$ は、 x の値によって、真偽が変わるから、数 I では 条件 と呼んでいたが、量子を加えると真偽が決まり、命題 となる。次の真偽を言え。

(1) すべての x について、 $x > 0$ False

(2) ある x について、 $x > 0$ True

11. 命題 $x^2 - x - 2 = 0$ の真偽。(偽なら反例を挙げよ。)

(1) すべての x について、 $x^2 - x - 2 = 0$ False 反例 $x = 0$ のとき

(2) ある x について、 $x^2 - x - 2 = 0$ True $(x-2)(x+1) = 0$
 $x = 2, -1$ が成り立つ。

方程式の解とは、等式を満たす「ある x 」全部である。

12. 命題 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ の真偽。(偽なら反例を挙げよ。)

(1) すべての x について、 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ True

(2) ある x について、 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ True

x の恒等式は、「すべての x 」について成り立つ等式である。

13. 「すべての $\sim$ 」の省略。

(1) 「 $x^2 \geq 0$ 」は常に成り立つので、「すべての」は 省略可

(2) 「 $x > 3 \Rightarrow x > 0$ 」も 省略可 $x \leq 3$ のときも含め真なので、「すべての」は 省略可

ド・モルガンの法則や記号は紹介にとどめ、その練習などはしなかった。

14. $x > 0$ の否定は $x \leq 0$ である。

(1) 「すべての x について、 $x > 0$ 」は偽。

その否定は真なので「ある x 」について、 $x \leq 0$

(2) 「ある x について、 $x > 0$ 」は真。

その否定は偽なので「すべての x 」について、 $x \leq 0$

ということで、「すべての $\sim$ 」と「ある $\sim$ 」は否定によって入れ替わる。ド・モルガンの法則

15. 量子「すべての $\sim$ 」と「ある $\sim$ 」はいろんな言い回しをする。

(1) 全称記号「すべての $\sim$ 」

「すべて x 」(for all x)

「どんな x 」(for any x)

「任意の x 」(for arbitrary x)

全部 $a \sim$ なので、記号で $\forall x$ と書く。(キター (°▽°) じゃないよ)

(2) 存在記号「ある $\sim$ 」

「ある x について」(there exists x)

「(ある) x が存在して」(there exists x)

存在 exist なので、記号で $\exists x$ と書く。

最後にいろいろ触れておいた。

日本語は、述語を後ろにくっつける文法なので、

「 $\forall \varepsilon \exists \delta \sim$ 」を

「すべての ε について、 $\sim$ を満たす δ が存在する。」と読んだりするが、逆にした

「 $\exists \delta \forall \varepsilon \sim$ 」と、

区別がつかなくなるので、日本語としては不自然になるが「存在する」を後ろにくっつけないほうがいい。

「 $\forall \varepsilon \exists \delta \sim$ 」は

「すべての ε について、ある δ が存在し、 $\sim$ を満たす。」

de Morgan の法則 (x の命題を $P(x)$ と書いている。)

$\neg(\forall x P(x)) \iff \exists x (\neg P(x))$ 「すべての x の否定」は「ある x が否定」

$\neg(\exists x P(x)) \iff \forall x (\neg P(x))$ 「ある x の否定」は「すべての x が否定」

$\forall$ と $\exists$ の順序を逆にすると、意味が変わる。

• $\forall M (\exists x (x > M))$ は発散の定義。

• $\exists x (\forall M (x > M))$ は、条件が強く空集合。

そもそも、1996 年に授業で扱ったのは、問題集に次の $\forall x \exists y$ と $\exists y \forall x$ の違いと、否定命題 (ド・モルガン) を答えさせる問題があったからである。

条件 A を「 $y > -x^2$ かつ $y < x^2 + 4x + a$ 」とすると、次のような定数 a の範囲を求めよ。

(1) どんな実数 x に対しても、それぞれ適当な実数 y をとれば A が成り立つ。

(2) 適当な実数 y をとれば、どんな実数 x をとっても、A が成り立つ。

(3) (1), (2) の否定命題を作り、それぞれの a の範囲を求めよ

6 本質に気づく生徒

1985 年流山高校の授業の雑談で、園芸科の新海くんと「数学の正しさについて」話題になった。そこで現代数学の立場、公理主義、形式主義に触れた。

「数学はいつも正しいのか」

「数学は、矛盾のないいくつかの基本性質を「公理」という仮説として、そこから論理によって、構成したものは正しいものと受け入れている。」

「論理が正しい保証はあるのか」

「実は論理にも公理があって、推論にも型があり、それに従った論証は正しいものとしようと、現代の数学はできあがっている。その中で、論理が正しいことは証明されている。⁹⁾」生徒が数理論理学（形式主義）の必要性に気づいた瞬間である。この問いに応えるために、ヒルベルト・プログラムが提唱された。公理主義に気づく生徒はときどきいるが、形式主義にまで踏み込んだのは彼だけであった。

本質的な問いに対して、「テストで点を取るには関係ない」と突っぱねるのは簡単である。とくに「数学は正しいのか」などという問いは、生意気なだけと捉えられかねない。しかしこのときに、生徒の素朴で本質を突く質問に真摯に応えるためには、数学を広く深く知らねばならないと思うようになったのである。¹⁰⁾

参考文献

- [1] 氏家悟, 「述語論理の指導教材 - 発見 する数学を目指して -」, $\alpha - \omega$, 57 号, 2020.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=jo5n16xk7-27#_27
- [2] 氏家悟, 「対偶と背理法, 反例」, $\alpha - \omega$, 60 号, 2022.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=jo10g24po-27#_27
- [3] 本橋信義, 「2つの“ならば”」, 数学セミナー, 2019 年 8 月
- [4] G.J. チャイティン, 知の限界, 2001 年 9 月
- [5] 氏家悟, 「テイラー展開を導く教材 - 体験する数学を目指して -」, $\alpha - \omega$, 56 号, 2018.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joy21ir5j-27#_27

⁹⁾ 命題論理の無矛盾性, 述語論理の完全性定理

¹⁰⁾ 当時, 若者同士で「多様体」のゼミを行ったことが懐かしい。