

近似値の与え方の工夫について

東葛飾高等学校 川野哲嗣

1 はじめに

教員になってから毎年、 $\alpha\omega$ の研究のページを読むことが楽しみでした。中でも西川誠先生の記事は初任の頃の私にとって知らないことばかりで、自分の未熟さを感じるものであったことを覚えています。西川先生とは県立柏高校で一緒にすることができ、西川先生が印旛明誠高校へご異動後、またご退職後もメールなどで数学についてのご指導を頂いています。最初のメールが2019年の4月になるので、県立柏での期間も含めるととても長い時間、たくさんのことを教えていただいています。

$\alpha\omega$ の研究のページは、あまり見かけない内容のほうが良いのかもしれませんが、今年は備忘録としての意味も込めて有名な話題とは思いますが、近似値についてまとめます。今年の記事を書くにあたり、西川先生には多くのヒントを頂きました。高校生がどこまで予備知識として持っておくべきか疑問ですが、教員にとっては知っていて損はないだろうと思います。

2 近似値を与えるときの工夫①

【問題 1】※ 2014 順天堂大学 医学部

- (1) $y = \sqrt{x}$ の導関数を求めよ。
- (2) $y = \sqrt{x}$ のグラフの $(1, 1)$ での接線の方程式を求めよ。
- (3) 求めた接線において、 $x = 1 + h$ に対する y 座標を $a + bh$ の形式で求めよ。
- (4) h が十分小さいときは、(3) の結果 $a + bh$ は $\sqrt{1 + h}$ のよい近似値となっており、

$$a + bh - \sqrt{1 + h} < \frac{h^2}{8} \text{ の関係が成立する。}$$

$\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + c}$ を満たす c の値を求め、 $\sqrt{17}$ の近似値を小数点以下第 2 位まで計算せよ。また、 $\sqrt{37}$ の近似値を小数点第 2 位まで計算せよ。

【問題 1】では、 $y = \sqrt{1 + x}$ について x が十分に小さいときの一次近似式 $y = \frac{1}{2}x + 1$ を考えることで、平方根の近似値を調べようとしています。が、 $\sqrt{17}$ などでは代入する x の値が大きすぎるので、 $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 \times \left(1 + \frac{1}{16}\right)}$ のような変形を誘導しています。誘導がなくとも、扱えるようにしておきたい内容だと思います。

教科書でも 2 次の近似式 $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ を扱っているものがあるので、マクローリン展開を授業の 1 つのネタとして話題にあげることもあるかと思いますが、上記の変形ができれば、1 次の近似式でも十分に良い近似値を与えることができます。不等式での評価は無視しながら、例を挙げておきます。

【問題 2】

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ とおく。 $f(x)$ の 1 次近似式を考えることで、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}}$ の近似値を求めよ。

$(1.25)^3 = 1.953125$ は先頭の 3 桁を考えながら計算しても 1.95 と良くないので、 $(1.24)^3$ を採用します。

$1.91 = (1.24)^3 + 0.003376 = \left(\frac{31}{25}\right)^3 + \frac{211}{62500}$ より、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{31}{25}\right)^3 + \frac{211}{62500}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{25}{31} \times \left(1 + \frac{211}{119164}\right)^{-\frac{1}{3}}$ と変形しておきます。 $f(x)$ の 1 次近似式 $f(x) \doteq 1 - \frac{1}{3}x$ より、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}} \doteq \frac{25}{31} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{211}{119164}\right) = \frac{8977025}{11138052} = 0.8059780112\dots$ であって、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}}$ の真の値 $0.805976187718\dots$ に近い値となりました。

代入する分数が計算するのに苦しい値であるとき、 $\frac{211}{119164}$ を、 $\frac{211}{119164} = [0; 564, 1, 3, 7, 3, 2]$ (最後までやる必要はない) と連分数展開して、 $\frac{211}{119164}$ の代わりに $\frac{1}{565}$ などを用いても、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}} \doteq \frac{25}{31} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{565}\right) = \frac{8470}{10509} = 0.8059758302\dots$ と小数第 5 位まで真の値と一致する近似値を得ることができます。 $\frac{211}{119164} = 0.001770668\dots$ を $0.00177 = \frac{177}{100000}$ で置き換えるなら、 $(1.91)^{-\frac{1}{3}} \doteq \frac{25}{31} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{177}{100000}\right) = \frac{99941}{124000} = 0.8059758064\dots$ と小数第 5 位まで真の値と一致させることができますが、 $\frac{211}{119164}$ を $\frac{17}{10000}$ や $\frac{18}{10000}$ に置き換えると精度が下がります。連分数展開して、分数を不等式で評価する方法も知っています。損はないと思います。

3 近似値を与えるときの工夫②

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ の近似式の改良を考えることにします。マクローリン展開での近似式は、 x の値が大きくなると近似の精度が悪くなってしまいます。ここでは、 $x \geq 0$ において、 $f(x) \doteq \frac{ax+b}{cx+d}$ のような近似式を考えます。 $f(0) = 1$ より $\frac{ax+b}{cx+d}$ の形で探します。2 次近似式 $f(x) \doteq 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ をとっておいて、 $\frac{ax+b}{cx+d} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \dots$ から $1+ax = (1+cx) \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \dots\right)$ として右边を展開後、 x の 1 次、2 次の係数が 0 となるように a, c を決めると、 $a = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$ で、 $f(x) \doteq \frac{\frac{1}{3}x+1}{\frac{2}{3}x+1} = \frac{x+3}{2x+3}$ とできます。関数のグラフを書いてみると、2 次近似式よりも $\frac{x+3}{2x+3}$ は x が小さくないところでも

$f(x)$ に近いことが分かります。

$$f(x) \doteq \frac{x+3}{2x+3} \text{ で, 【問題 2】を改めて計算すると, } (1.91)^{-\frac{1}{3}} \doteq \frac{25}{31} \times \frac{\frac{211}{119164} + 3}{2 \times \frac{211}{119164} + 3} = \frac{8942575}{11095334} = 0.8059761878\dots \text{ となり, 真の値と小数第 9 位まで一致します。}$$

$$\frac{211}{119164} \text{ の代わりに } \frac{1}{565} \text{ を用いても, } (1.91)^{-\frac{1}{3}} \doteq \frac{25}{31} \times \frac{\frac{1}{565} + 3}{2 \times \frac{1}{565} + 3} = \frac{42400}{52607} = 0.80597639097\dots$$

と真の値と小数第 6 位まで一致します。関数を 1 次の分数式で近似すると精度が良いことが分かります。計算も 2 次近似式などで行うより簡単になります。

$$f(x) \doteq \frac{ax^2 + bx + 1}{cx^2 + dx + 1} \text{ のような近似式も } \frac{ax^2 + bx + 1}{cx^2 + dx + 1} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 \dots \text{ から } 1 + bx + ax^2 = (1 + dx + cx^2) \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 \dots \right) \text{ とし}$$

$$\text{て右辺を展開後, } x \text{ の 1 次から 4 次の係数が 0 となるように } a, b, c, d \text{ を決めると, } a = \frac{5}{54},$$

$$b = \frac{5}{6}, c = \frac{7}{27}, d = \frac{7}{6} \text{ となり, } f(x) \doteq \frac{\frac{5}{54}x^2 + \frac{5}{6}x + 1}{\frac{7}{27}x^2 + \frac{7}{6}x + 1} = \frac{5x^2 + 45x + 54}{14x^2 + 63x + 54} \text{ と求める}$$

ことができます。これは 1 次の分数式より精度が良い近似式ですが、求めること自体が簡単な計算ではなく、また数値を求める際にも 2 次の計算が必要となるので、近似値を求めるときに楽ではないだろうと思います。

4 自然対数 $\log 2$ の近似値と入試問題

自然対数 $\log 2 = 0.6931471805\dots$ の評価に関する大学入試問題を 2 つ取り上げます。

【問題 3】※ 2007 東京大学

- (1) $0 < x < a$ を満たす実数 x, a に対し, $\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$ を示せ。
- (2) (1) を利用して, $0.68 < \log 2 < 0.71$ を示せ。

(1) は $s = \frac{1}{t}$ ($t > 0$) 上の点 $A\left(a-x, \frac{1}{a-x}\right)$, $B\left(a+x, \frac{1}{a+x}\right)$, $C\left(a, \frac{1}{a}\right)$ から x 軸に垂線を下ろして, 台形の面積によって $\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt$ を評価することができますが, (2) は $\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt = \log \frac{a+x}{a-x}$ で, $\frac{a+x}{a-x} = 2$ ではうまく行かず, $\frac{a+x}{a-x} = \sqrt{2}$ などとする工夫が必要な良い問題です。

【問題 4】※ 2004 愛知教育大学

(1) $\int \frac{dx}{1-x^2}$ を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ のとき, $1+x^2 \leq \frac{1}{1-x^2} \leq 1 + \frac{9}{8}x^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分を利用して, $\frac{56}{81} < \log 2 < \frac{25}{36}$ を示せ。

(1) の解は, $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ (C は積分定数) であって, (2) の不等式から $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ の定積分を考えることで, $\log 2$ の値を $\frac{56}{81} = 0.69135\dots$ と $\frac{25}{36} = 0.69444\dots$ で評価しています。2022 年に室蘭工業大学でも不等式 $0.691 < \log 2 < 0.694$ の証明が出題されています。【問題 3】より【問題 4】のほうが良い評価となっています。【問題 3】【問題 4】ともに良い不等式を与えてくれています。 $\log 2$ の近似値は, $\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ の展開 $\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots$ を考えることで $\log 2$ を下から評価できることは有名です。【問題 3】【問題 4】のような誘導や, $\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ の展開以外の方法で, $\log 2$ の近似値を考えたいと思います。

5 自然対数 $\log 2$ の近似値

$f(x) = \log(1+x)$ について, $f(x) \doteq \frac{ax+b}{cx+d}$ の形で近似式を求めてみます。 $f(0) = 0$ より $b = 0$ であって, $d = 1$ としておきます。 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots = \frac{ax}{cx+1}$ から $ax = (cx+1) \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots \right)$ として右辺を展開後, x の 1 次, 2 次の係数が 0 となるように a, c を決めると, $a = 1, c = \frac{1}{2}$ となり, $f(x) \doteq \frac{x}{\frac{1}{2}x+1} = \frac{2x}{x+2}$ と求めることができます。 $\log(1+x) \doteq \frac{2x}{x+2}$ と $\log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$ を用いて, $\log 1.5$ の近似値をとってみると, $\log(1+x) \doteq \frac{2x}{x+2}$ では $\log 1.5 \doteq \frac{2}{5} = 0.4$ で, $\log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$ では $\log 1.5 \doteq \frac{3}{8} = 0.375$ となり, $\log 1.5$ の真の値 $\log 1.5 = 0.405465\dots$ に対して, $\log(1+x) \doteq \frac{2x}{x+2}$ のほうが良いことが分かります。 $\log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$ は x が十分小さくないと, 近似の精度が悪くなってしまいます。 x の値が小さくなくとも変形による工夫で, 代入する x を小さくする方法を先に確認しましたが, e が絡んでくると扱いが難しくなります。 $\log 2$ の近似値は, $\log(1+x) \doteq \frac{2x}{x+2}$ では $\log 2 \doteq \frac{2}{3} = 0.66\dots$ ですが, $\log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$ では $\log 2 \doteq \frac{1}{2} = 0.5$ となり, $\log 2$ の真の値 $0.693147\dots$ の近似値と言えるものではありません。

$\log(1+x) \doteq \frac{2x}{x+2}$ での $\log 2$ の近似値も精度が良くないので, $\frac{(2 \text{ 次式})}{(2 \text{ 次式})}, \frac{(3 \text{ 次式})}{(3 \text{ 次式})}$ の近

似式を同様の方法で求めると近似の精度は良くなります。 $\frac{(3 \text{ 次式})}{(3 \text{ 次式})}$ での $\log 2$ の近似値は小数第 4 位まで一致します。しかし、求める上で、 $\frac{ax^3+bx^2+cx}{sx^3+tx^2+ux+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$ から式変形して、展開後に x の 1 次から 6 次までの係数を見ることになり、計算は楽ではありません。計算が面倒になるのは分母の次数のせいなので、 $\frac{(3 \text{ 次式})}{(1 \text{ 次式})}$, $\frac{(4 \text{ 次式})}{(1 \text{ 次式})}$, $\frac{(3 \text{ 次式})}{(2 \text{ 次式})}$, $\frac{(4 \text{ 次式})}{(2 \text{ 次式})}$ などの形で探して表にまとめておきます。 $f(x)$ の分数関数の近似式を $f_{m,n}(x) = \frac{(m \text{ 次式})}{(n \text{ 次式})}$ と書くことにします。

	近似式	近似値		近似式	近似値
$f_{2,2}$	$\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$	$\frac{9}{13} = 0.6923\dots$	$f_{4,1}$	$\frac{x^4-4x^3+18x^2+60x}{48x+60}$	$\frac{25}{36} = 0.6944\dots$
$f_{3,1}$	$\frac{-x^3+6x^2+24x}{18x+24}$	$\frac{29}{42} = 0.6904\dots$	$f_{4,2}$	$\frac{-x^4+12x^3+150x^2+180x}{72x^2+240x+180}$	$\frac{341}{492} = 0.6930\dots$
$f_{3,2}$	$\frac{x^3+21x^2+30x}{9x^2+36x+30}$	$\frac{52}{75} = 0.6933\dots$	$f_{3,3}$	$\frac{11x^3+60x^2+60x}{3x^3+36x^2+90x+60}$	$\frac{131}{189} = 0.69312\dots$

$0 \leq x \leq 6$ において $f_{3,1} \leq f_{2,2} \leq f_{4,2} \leq f_{3,3} \leq f(x) \leq f_{3,2} \leq f_{4,1}$ となっています。 $x = 6$ で $f_{2,2}$ と $f_{4,2}$ の上下が入れ替わります。 $f_{4,2} \leq \log(1+x) \leq f_{3,2}$ を確認すると、【問題 4】よりも評価を良くすることができました。 $f_{2,2}$ でも十分ですが、 $f_{4,2}$ なら小数第 3 位まで決まります。 $f_{4,2}$ は大変な形をしています、分母が 2 次ぐらいであれば、計算量は多くありません。分母が 1 次であるとき、係数が簡単に決まっていますが、 $f_{3,1}$ と $f_{4,1}$ での評価 $\frac{29}{42} < \log 2 < \frac{25}{36}$ は【問題 4】に比べて良い評価となりませんでした。

6 最後に

$\log 2$ を適当に評価しながら $\log 1.5$ も評価することで、 $\log 3$ を評価できます。 $f(x) = \log(1+x)$ を評価する分数関数をいろいろ作れるのは面白いと思います。代入する x の影響を小さくするように、級数展開で x の次数が低い項から消していきましたが、精度を無視すれば構成の仕方は無数にあります。不等式の証明の作問などで利用可能だと思います。

近似式を分数関数の形で構成することを考えたので、2023 年の東京工業大学の出題にある $\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x} dx$ のような問題に対して、 $f(x) = e^x$ が $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ とできることなどを上手く利用できないかなども検討しましたが、良い例とはなりません。 (適用して解くことはできますが、評価がそもそも緩いので $x = 1$ での接線で十分です。) 私自身が一つの引き出しとして持っておきたい知識として、まとめてみましたが、良い使用方法などありましたらご教授いただけたらと思います。