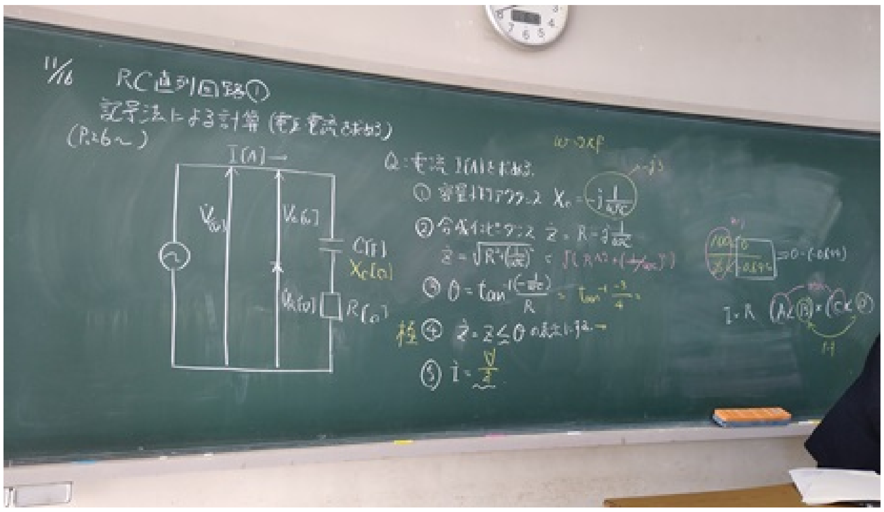
極形式

市川工業高等学校　氏家 悟

1　はじめに

2022 年 11 月，本校電気科 2 年生の「電気基礎」[1)]の公開授業を参観した。そこでの複素数の扱いを紹介する。



虚数は「こんなありえない数を考えて何の意味があるのだろう」と，数学を苦手とする者にとって，役に立たない数学の代表格のひとつである。実際に使われ役立つ例は，ネットや書籍でも様々紹介されているので，少し探せばいくらでも見つかるが，そうした情報にたどり着くのは興味がある者に限られる。興味がなければ自分から探すことはないので，情報にはたどり着くことなく，「意味のない，役に立つのかわからない，架空の数」で終わってしまう[2)]。数学 II の範囲では「代数方程式（実際は 2 次方程式）が，必ず解を持つことができる」ことくらいの有用性だろうが，数学 I で「解なし」としていたものが「虚数解を持つ」に言い方が変わった程度のことである。

複素数平面で，図形との関係を学べは少しは「何か使える」感が出てくるが，その程度のことは複素数を使わずとも，ベクトルや行列で表現できる範囲のことである。自分が授業を受けた 1973 年施行の学習指導要領[3)]には複素数平面はなく，ベクトルや行列（一次変換）で図形

1) 現 2 年生の学習指導要領から，この科目は「電気回路」に引き継がれた。

2) ネットで何でも検索できるといっても，そもそも知らないことや興味のないことは検索しない。「学校は興味のないことでも，強制的に学ばせて人間の幅を広げるところ」と生徒に言っている。

3) 詰め込み教育と言われ，次はゆとり教育になった。吹奏楽コンクールで，ワグナーの「エルザの大聖堂への行列」を演奏することになったとき，数学が苦手な同級生が「行列やだ」と言っていたのを思い出す。

の回転や変形を扱っていた。そもそも，$a+bi$ は

$$a\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

と同一視できる。

本校の教育課程は，1, 2 年で数学 I，II，3 年が学校設定科目で，いずれも虚数の極形式にはたどり着かない。これまで普通高校で，今回紹介している電気や波動[4)]で虚数を話題とすることはあったが，生徒にとって現実味がないので，ハードルは高い [2]。

参観した電気基礎の授業では，複素数の極形式を計算をしていた。電気科の生徒にとっては，虚数は想像上の数（imaginary number）ではなく，電卓で数値計算する実在する数なのである。電磁気は目に見えるモノではないので，これも「人間の想像の産物」と言えば，その通りではあるが。

2　RC 直列回路

授業課題はだいたいは次の通りで，図や記号，語の用法は教科書 [1] のものである。文字の上のドット $\dot{Z}=R-jX_c$ は複素数を表していて，虚数単位は j で表している[5)]。そして，絶対値 Z を「大きさ」，偏角 θ を「角」と呼び，極形式を $\dot{Z}=Z\angle\theta$ と表している。

Q: 電流 $\dot{I}$ [A] を求める。
周波数 $f=8$ [kHz]，100 [V] の交流電圧を，$R=4$ [Ω] の抵抗器と $C=6.64$ [μF] のコンデンサを直列に接続した回路に加えている。

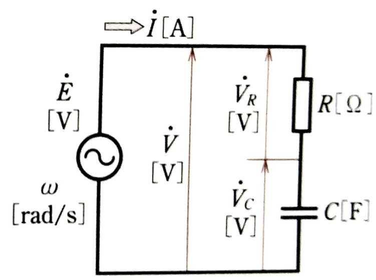


図22　*RC* 直列回路の回路図

① 容量性リアクタンス $X_c=\frac{1}{\omega C}$ [Ω] を求める。角周波数 $\omega=2\pi f$ より $X_c=\frac{1}{2\pi fC}$ [Ω]

$\boxed{X_c=\frac{1}{2\pi\times 8\times 10^3\times 6.64\times 10^{-6}}=3.00\ [\Omega]}$

② 合成インピーダンス $\dot{Z}=R-jX_c=R-j\frac{1}{\omega C}$ [Ω]，その大きさ $Z=\sqrt{R^2+X_c^2}$ [Ω]

$\boxed{\dot{Z}=4-j3\ [\Omega],\qquad Z=\sqrt{4^2+3^2}=5\ [\Omega]}$

③ 角 $\theta=\tan^{-1}\frac{-X_c}{R}$ [rad]

$\boxed{\theta=\tan^{-1}\frac{-3}{4}=-0.644\ [\mathrm{rad}]}$

④ 極表示 $\dot{Z}=Z\angle\theta$ [Ω] にする

$\boxed{\dot{Z}=5\angle-0.644\ [\Omega]}$

⑤ 電流 $\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}$ [A]

$\boxed{\dot{V}=100\angle 0\ [\mathrm{V}]\ \text{より，}\ \dot{I}=\frac{100\angle 0}{5\angle-0.644}=20\angle(0-(-0.644))=20\angle 0.644\ [\mathrm{A}]}$

電流 $\dot{I}$ の位相は電圧 $\dot{V}$ の位相より，$\boxed{0.644\ [\mathrm{rad}]\ (36.9\ 度)}$ だけ進んでいる。

公式はすでに示されており，生徒はそれに従って枠内のように関数電卓で計算する。この授業は「ICT 活用実践例」の授業公開だったので，生徒は個々の iPad に配布された電子データ

4) $\psi(\vec{x},t)=Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ みたいな。
5) 電気では i を電流の記号に用いるためである。

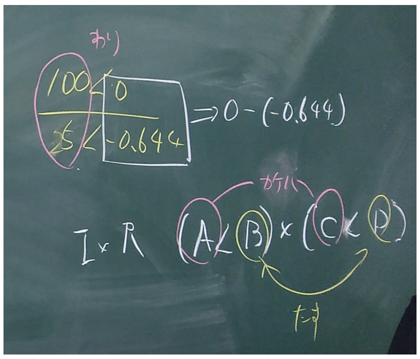
に結果を書き込んでいた[6]。

電圧 $\dot{V} = 100\angle 0$ [V] の複素数は，絶対値 100V，偏角 0 [rad] を表しているが，交流電源は正弦曲線を描き，1 周期を 2π として，電源 0 [rad] からの位相差を $\angle\theta$ で表している。偏角 $\angle\theta$ は教科書では「位相角」,「インピーダンス角」など場面に応じて使い分けていたが，授業担当は $\angle\theta$ を単に「角」と呼んでいて，そのほうが生徒が混乱しないと思う。

そして，その積と商はこの授業では

$$A\angle\alpha \times B\angle\beta = A \times B\angle(\alpha+\beta), \qquad \frac{A\angle\alpha}{B\angle\beta} = \frac{A}{B}\angle(\alpha-\beta),$$

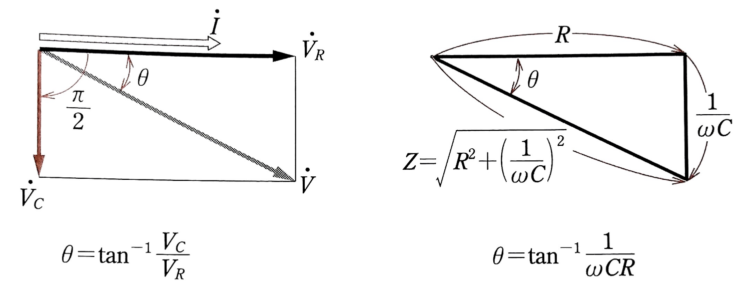
と，既習のようではあったが,



と復習しながらであった。

本校の数学 II 三角関数では弧度法まで触れていないが，生徒の電卓が弧度法になっているので，数学の時間に $\sin 11 \fallingdotseq -1$ や $\cos 355 \fallingdotseq -1$ を計算させると，「おぉっ！」と感動してくれる。円周率の近似分数 $\pi \fallingdotseq \frac{22}{7}$ より $\sin 11 \fallingdotseq \sin\frac{7}{2}\pi$, $\pi \fallingdotseq \frac{355}{113}$ より $\cos 355 \fallingdotseq \cos 113\pi$ だからである。生徒から「もっとないの？」と言われたが，自分は連分数の知識 $\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292\cdots}}}}$ しかないので，そこから次は，$\frac{103993}{33102}$ と急に桁数が増えてしまって，ありがたみがない [3]。

授業の次の課題は，ベクトル図の作成に続いていた。教科書 [1] の図より，そこでは R の電圧 $\dot{V}_R = \dot{I}R = 20\angle 0.644 \times 4$ などを計算するようだ。本校の教育課程では数学 B がないが，ベクトルは 2 年の 3 学期に授業プリントで少しだけ触れている。つまり，11 月のこの授業には間に合わなかった。



(a) ベクトル図　　(b) インピーダンス三角形

図23　RC 直列回路のベクトル図とインピーダンス三角形

[6] 公式を導く理論は大学レベルなのだろう。課題の定数は直角三角形が 3:4:5 になるように決めているようだ。

3　極形式の指導

以前普通高校で，複素数の極形式を扱った際，オイラーの関係式

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

を天下りに定義[7]して，極形式を $re^{i\theta}$ として指導したことがある [4]。極形式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は，絶対値 r と偏角 θ の 2 つのパラメータを 3 カ所に記述することが，ハードルを上げていると思ったからであった。こうすれば，ド・モアブルの定理は，「絶対値は積，偏角は和」を強調できると思ったからである。

つまり，

$r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + \sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2))$

を

$r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

と表記すれば，式変形は指数法則そのもので，sin, cos に惑わされず，「絶対値は積，偏角は和」に集中できるわけである。

さらに，$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4})$ として「偏角は $\frac{\pi}{4}$」としてしまう間違いに気づかせることもできるとも考えた。「$e^{i\theta}$ にできるのは，$i\sin$ の符号が $+$ に限る」ことで，そのような勘違いを防ごうと思ったのである。

ただ，$re^{i\theta}$ の表記では，天下りとはいえナゾの文字 e を用いている。

もともと電磁気学では，絶対値 Z, 偏角 θ を $Ze^{j\theta}$ で表記しているが，e は高校生にはナゾの文字といえるので，今回の授業の $\dot{Z} = Z\angle\theta$ は絶対値と偏角の，真に 2 つだけのパラメータに着目した表記といえる。

しかし，指数を使わないので，ド・モアブルの定理

$r_1\angle\theta_1 \times r_2\angle\theta_2 = r_1 \times r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$

では，指数法則に見えないのが，難点かもしれない。

再任用 2 年目の自分が，これから極形式を教える場面があるかどうかはわからないが，機会があれば電気基礎の極形式を試してみたいものである。

参考文献

[1] 電気基礎 2　新訂版, 実教出版

[2] 氏家悟,「複素数平面」, $\alpha - \omega$，52 号，2014.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joh18kzt3-27#_27

[3] 氏家悟,「連分数」, $\alpha - \omega$，53 号，2015.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joq7mhipe-27#_27

[4] 氏家悟,「テイラー展開を導く教材　－体験する数学を目指して－」, $\alpha - \omega$，56 号，2018.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joy21ir5j-27#_27

[7] それこそ証明は，厳密なものから感覚的なものまでネットにたくさん転がっている。