置換積分をするときに

県立柏高等学校　川野哲嗣

1　今回のテーマへのきっかけとなった問題

【問題１】※ 2001 年東京理科大学理学部 (数・物・化) 第 2 問
座標平面上に曲線 $C_1 : y^2 = 26 - 19\left(e^x + e^{-x}\right) + 7\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$ と曲線 $C_2 : y^2 = 4\left(x^2 - 2x^3\right)$ が与えられている。ただし，$x \geqq 0$ とする。
(1) 曲線 C_2 上の点 P における接線が x 軸と平行になるとき，点 P の座標を求めよ。
(2) $t = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ とおく。点 (x, y) が曲線 C_1 上にあるとき，y^2 を t の式で表せ。
(3) 曲線 C_1 と x 軸との交点の x 座標の値を α とする。$\dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$ の値をすべて求めよ。
(4) 曲線 C_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【問題１の解】
(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$　(2) $y^2 = 4\left(t^2 - 2t^3\right)$
(3) $\dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 0, \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(4) $\pi\left(-\dfrac{67}{6}\sqrt{5} + 26\log\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

2　【問題 1】の解法を考える上で生じた疑問

(2) において，$e^x + e^{-x} = 2(t+1)$ を上手く代入して，$y^2 = 4(t^2 - 2t^3)$ を得ます。
x を t の式で表しておくと，$x = \log(t + 1 \pm \sqrt{t^2 + 2t})$ となっています。
(4) において，求める体積を V とすると，$V = \displaystyle\int_0^a \pi y^2 dx (a = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ とおく$)$
となり，C_1 の式をそのまま用いて e^x についての定積分を計算することで V を求めることになります。(2) で媒介変数表示をしていることを利用して，積分区間に注意して $x = \log(t+1+\sqrt{t^2+2t})$ として $dx = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を求め，(4) において $V = 4\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を考えた場合，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を上手く計算できるのでしょうか。(2) の誘導からこちらを考えようとすることはありえないでしょうか。広義積分となっているので，そもそもこちらに変形してしまうと上手くいかないですが，少し考察してみたいと思います。

3 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を置換積分で処理する

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ の処理の一例として，$t+1=\dfrac{1}{\cos u}$ での置換積分を考えてみます。t が $0\to\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos u$ は $0\to\dfrac{2}{3}$ で， $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$ となる β を準備して，$dt=\dfrac{\sin u}{\cos^2 u}du$ から

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2(-2t+1)}{\sqrt{(t+1)^2-1}}dt$$

$$=\int_0^{\beta}\frac{(\frac{1}{\cos u}-1)^2(-\frac{2}{\cos u}+3)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1}}\cdot\frac{\sin u}{\cos^2 u}du$$

$$=\int_0^{\beta}\frac{(\frac{1}{\cos^2 u}-\frac{2}{\cos u}+1)(-\frac{2}{\cos u}+3)}{\tan u}\cdot\tan u\cdot\frac{1}{\cos u}du$$

$$=\int_0^{\beta}(-\frac{2}{\cos^4 u}+\frac{7}{\cos^3 u}-\frac{8}{\cos^2 u}+\frac{3}{\cos u})du(\cos\beta=\frac{2}{3})$$ とできます。

① $\int\dfrac{1}{\cos^4 x}dx=\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$（$C$ は積分定数）

② $\int\dfrac{1}{\cos^3 x}dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}\log(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x})+C$（$C$ は積分定数）

③ $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$（$C$ は積分定数）

④ $\int\dfrac{1}{\cos x}dx=\dfrac{1}{2}\log(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x})+C$（$C$ は積分定数）

この例で置換積分すると，$\int\dfrac{1}{\cos^n x}dx$ の積分がたくさん出てきますが，上記の不定積分によって計算可能です。しかし，正確に早く処理できる高校生は多くないと思います。【問題１】について，$V=4\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を考えた上で置換積分しないで，解くことはできないでしょうか。どのように式を変形するべきでしょうか。広義積分となってしまうので，被積分関数に対して不定積分を考えることにします。

4 $J=\int\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ の変形

$\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$（$C$ は積分定数）を用いる場面がありますが，【問題１】については，これも置換積分を必要としません。 $J=\int\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を処理する方法として，被積分関数の次数に着目してみたいと思います。被積分関数 $f(t)=\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}$ の分母 $\sqrt{t^2+2t}$ が t についておよそ 1 次式であると考えると，$f(t)$ はおよそ 2 次式であると考えることができます。よって，$f(t)$ の原始関数はおよそ 3 次式で，微分して $\sqrt{t^2+2t}=$（お

よそ 1 次式）が形を残すように，$F(t)=(at^2+bt+c)\sqrt{t^2+2t}$ を置けないかと考えてみることにします。（実際はずれてしまいます）

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= (2at+b)\sqrt{t^2+2t}+(at^2+bt+c)\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}} \\
&= \frac{(2at+b)(t^2+2t)+(at^2+bt+c)(t+1)}{\sqrt{t^2+2t}} \\
&= \frac{3at^3+(5a+2b)t^2+(3b+c)t+c}{\sqrt{t^2+2t}}
\end{aligned}
$$

となるので定数項を除いて，$\dfrac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}$ と係数を比較し，$3a=-2, 5a+2b=1, 3b+c=0$ から $a=-\dfrac{2}{3}, b=\dfrac{13}{6}, c=-\dfrac{13}{2}$ を得ます。すなわち $F(t)=-\dfrac{1}{6}(4t^2-13t+39)\sqrt{t^2+2t}$ とその導関数 $F'(t)=\dfrac{-2t^3+t^2-\frac{13}{2}}{\sqrt{t^2+2t}}$ がわかるので，

$J=\displaystyle\int\frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt=\int\frac{-2t^3+t^2-\frac{13}{2}}{\sqrt{t^2+2t}}dt+\int\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ という分解を考えると，

$J=-\dfrac{1}{6}(4t^2-13t+39)\sqrt{t^2+2t}+\dfrac{13}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ とできます。部分積分に似た形ですが，この変形は係数比較することで求めることが可能です。この変形の後に置換積分すれば，計算量を減らすことができます。置換積分することで広義積分から逃げることが可能です。$I=-\dfrac{67}{24}\sqrt{5}+\dfrac{13}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ の部分は，$x=\log(t+1+\sqrt{t^2+2t})$ から，$dx=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ としたことに注意すれば，（本題とずれるので，下端を b として極限をとるような広義積分の記法を無視して）

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt=-\frac{67}{24}\sqrt{5}+\frac{13}{2}\Big[\log(t+1+\sqrt{t^2+2t})\Big]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{67}{24}\sqrt{5}+\frac{13}{2}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

とすることができ，これで置換積分せずに，

$V=4\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2t^3+t^2}{\sqrt{t^2+2t}}dt=4\pi(-\frac{67}{24}\sqrt{5}+\frac{13}{2}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2})=\pi(-\frac{67}{6}\sqrt{5}+26\log\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ を求めることができました。

【問題 1】では，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ の部分をすでに $x=\log(t+1+\sqrt{t^2+2t})$ と $dx=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ を考えていたために容易に処理することができましたが，残ってしまった部分だけは置換積分することになります。この解法で共有したいことは，置換積分するときに一気に置換してしまうと，高校生が扱う簡単な関数で不定積分の形に書けてしまう部分までまとめて置換することになっていて，置換後の計算を無為に難しくしているということです。$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}}dt$ の部分だけの置換は，$s=t+1+\sqrt{(t+1)^2-1}$ とするのが簡単なことは有名だと思いますし，受験生なら $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$（$C$ は積分定数）は知っていて良いと思います。

微分する前の関数を予想し係数比較することで，簡単な不定積分で処理できる部分を除去してしまうほうが計算量が減ります。微分する前の関数を探ろうとする作業は，部分積分に似ているような感覚だと思っています。$\int x\sin x dx$ に対して，$(x\cos x)'$ から $x\sin x$ の形を見つけられるとする感覚に似ています。【問題１】について係数比較して元々の形を探る方法は実際に計算してもらえば分かりますが，C_1 の式をそのまま用いて e^x についての定積分を計算することで算出と大差ない時間で処理が可能です。

5　解法の利用例

【問題２】　※横浜市立大 2008 年　改題
定積分　$K=\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{4-x^2}dx$　を求めよ。

$x=2\sin\theta$ を置換すれば，$K=128\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta$ となります。$\int \sin^n\theta d\theta$ の訓練としては良い問題ですが，少しだけ計算が大変です。$K=128\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{4-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-x^6+4x^4}{\sqrt{4-x^2}}dx$ と変形し，【問題１】で用いた方法と同様にして，$f(x)=\frac{-x^6+4x^4}{\sqrt{4-x^2}}$ に対して，原始関数が $F(x)=(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)\sqrt{4-x^2}$ という形ではないかと予想して，微分して通分し，定数項を除いて係数比較すれば，$a=\frac{1}{6},b=0,c=-\frac{1}{6},d=0,e=-1,f=0$ を得ます。すなわち，$F(x)=\frac{1}{6}(x^4-x^2-6)x\sqrt{4-x^2}$ と $F'(x)=\frac{-x^6+4x^4-4}{\sqrt{4-x^2}}$ が分かったので，

$$\begin{aligned}
K&=\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{4-x^2}dx=2\int_0^1\frac{-x^6+4x^4}{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&=2\int_0^1\frac{-x^6+4x^4-4}{\sqrt{4-x^2}}dx+2\int_0^1\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&=2\left[\frac{1}{6}(x^4-x^2-6)x\sqrt{4-x^2}\right]_0^1+8\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&=-2\sqrt{3}+8\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx
\end{aligned}$$

と変形できます。$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C(a>0)$ を許せばすぐに計算が終わりますが，$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ は $x=2\sin\theta$ の置換によって多くの受験生が早く処理することができると思います。よって，$K=-2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$ を得ます。

置換する前に工夫しておけば，置換後の積分が楽になりそうな例として採用しましたが，原

題は $I=\int_{-2}^{2}x^4\sqrt{4-x^4}dx$ を求めるもので，同様に処理しようとすると，$\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ などがでてきてしまい，広義積分の処理が必要になるので注意が必要です。この点において，【問題２】も良い例ではなかったかもしれません。【問題２】は特殊な例として採用しましたが，$\int \sin^n xdx$ に対する積分漸化式を組む作業と大差ないような知識の補充だと考えています。置換積分や部分積分といった技術に頼ってばかりいると，微分するとその関数になるものを探すという積分の本質を忘れてしまうのではないかと思います。上手い置換が見つからない定積分は諦めてしまうことになります。定積分に関する出題（横浜国立大学や京都大学など）で紹介した方法が活用できる場面があります。また，対数関数・双曲線関数が元ネタにあるような媒介変数表示を用いた出題での積分にも適用可能な場面があります。

6　最後に

【問題３】　次の定積分を求めよ。
(1)$\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{x(3x^2+7x+6)}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{2x^5-3x^4-2x+2}{\sqrt{x^4-2}}dx$

(1) は復習のために，(2) は良い置換がすぐに見えない例として問題を設定しました。どちらも余計な関数が出てきませんので係数比較のみで処理可能です。(2) は $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{2x^5-3x^4-2x+1}{\sqrt{x^4-2}}dx$ となると楕円積分がでてきてしまって高校生では処理ができなくなります。被積分関数の原始関数はそれぞれ (1)$(x^2+x-3)\sqrt{x^2+2x+3}$, (2)$\frac{1}{2}x(x-2)\sqrt{x^4-2}$ でとることができて，解は (1)$30\sqrt{2}$ (2)$\frac{21}{32}$ となるはずです。不備がありましたらご教授ください。置換積分を考えるとき，良い変換を見つけることばかりに気を取られて，変換後の次数の高さなどは気にしていないケースが多いだろうと思います。「置換しなくても処理できる部分まで巻き添えにしない」「積分の本質は何か？」そんなことを考えてみたので共有できたら良いなと思います。

7　余談

別件ですが，私は $\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$ のように $\log_{p^n}q=\frac{1}{n}\log_p q$ を使用することが非常に多いです。教科書や参考書は底の変換公式を用いているので書かれていないこともあるようです。真数の指数を係数に出すように，底の指数は逆数として係数に出せるのは対数の定義から明らかですが，あまり扱われていない理由をご存じの方はご教授ください。ちなみに，底の変換公式は $\log_a b=\log_{c^{\log_c a}}b=\frac{1}{\log_c a}\log_c b$ で許していることになります。