令和5年度 共通テスト (本試　令和5年1月16日実施)

数学I・数学A (70分, 100点)

第1問 (必答問題)(配点 30)

〔1〕実数 x についての不等式 $|x+6| \leqq 2$ の解は $\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって，実数 a, b, c, d が $\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ であることがわかる。特に

$(a-b)(c-d) = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ …① であるとき，さらに

$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3}$ …② が成り立つならば

$(a-d)(c-b) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3}$ …③ であることが，等式①,②,③の左辺を展開して比較することによりわかる。

〔2〕(1) 点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A,B を AB = 6 となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A,B とは異なる点 C をとる。

(i) $\sin\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{サ}}$ である。また，点 C を $\angle\mathrm{ACB}$ が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{シ}}$ である。

(ii) 点 C を $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle\mathrm{OAD} = \boxed{\text{ス}}$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(2) 半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P,Q,R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で $\mathrm{PQ}=8, \mathrm{QR}=5, \mathrm{RP}=9$ であったとする。球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。まず，$\cos\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることから，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ である。次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき，PH,QH,RH の長さについて，$\boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{ニヌ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $\mathrm{PH} < \mathrm{QH} < \mathrm{RH}$	① $\mathrm{PH} < \mathrm{RH} < \mathrm{QH}$	② $\mathrm{QH} < \mathrm{PH} < \mathrm{RH}$
③ $\mathrm{QH} < \mathrm{RH} < \mathrm{PH}$	④ $\mathrm{RH} < \mathrm{PH} < \mathrm{QH}$	⑤ $\mathrm{RH} < \mathrm{QH} < \mathrm{PH}$
⑥ $\mathrm{PH} = \mathrm{QH} = \mathrm{RH}$		

第2問 (必答問題)(配点 30)

〔1〕太郎さんは，総務省が公表している 2020 年の家計調査の結果を用いて，地域による食文化の違いについて考えている。家計調査における調査地点は，都道府県庁所在市および政令指定都市 (都道府県庁所在市を除く) であり，合計 52 市である。家計調査の結果の中でも，スーパーマーケット

などで販売されている調理食品の「二人以上の世帯の１世帯当たり年間支出金額 (以下，支出金額，単位は円)」を分析することにした。以下においては，52 市の調理食品の支出金額をデータとして用いる。

太郎さんは調理食品として，最初にうなぎのかば焼き (以下，かば焼き) に着目し，図１のように 52 市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値は含まない。なお，以下の図や表については，総務省の Web ページをもとに作成している。

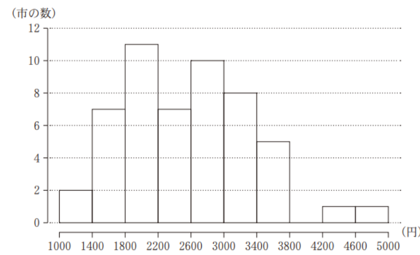


図１　かば焼きの支出金額のヒストグラム

(1) 図１から次のことが読み取れる。

・第１四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{ア}}$ である。

・第３四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{イ}}$ である。

・四分位範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1000 以上 1400 未満	① 1400 以上 1800 未満	② 1800 以上 2200 未満
③ 2200 以上 2600 未満	④ 2600 以上 3000 未満	⑤ 3000 以上 3400 未満
⑥ 3400 以上 3800 未満	⑦ 3800 以上 4200 未満	⑧ 4200 以上 4600 未満
⑨ 4600 以上 5000 未満		

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ 800 より小さい	① 800 より大きく 1600 より小さい
② 1600 より大きく 2400 より小さい	③ 2400 より大きく 3200 より小さい
④ 3200 より大きく 4000 より小さい	⑤ 4000 より大きい

(2) 太郎さんは，東西での地域による食文化の違いを調べるために，52 市を東側の地域 E(19 市) と西側の地域 W(33 市) の二つに分けて考えることにした。

(i) 地域 E と地域 W について，かば焼きの支出金額の箱ひげ図を，図２，図３のようにそれぞれ作成した。かば焼きの支出金額について，図２と図３から読み取れることとして，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

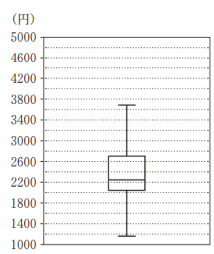


図２　地域 E におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

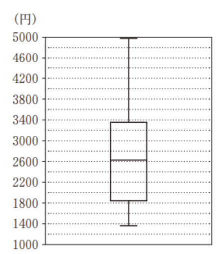


図３　地域 W におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 地域 E において，小さい方から５番目は 2000 以下である。

① 地域 E と地域 W の範囲は等しい。

② 中央値は，地域 E より地域 W の方が大きい。

③ 2600 未満の市の割合は，地域 E より地域 W の方が大きい。

(ii) 太郎さんは，地域 E と地域 W のデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い，それぞれの分散を考えることにした。地域 E におけるかば焼きの支出金額の分散は，地域 E のそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 2 乗を合計した値
① 絶対値を合計した値
② 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値
③ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値
④ 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの
⑤ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの

(3) 太郎さんは，(2) で考えた地域 E における，やきとりの支出金額についても調べることにした。

ここでは地域 E において，やきとりの支出金額が増加すれば，かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え，まず図 4 のように，地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した。そして，相関係数を計算するために，表 1 のように平均値，分散，標準偏差および共分散を算出した。ただし，共分散は地域 E のそれぞれの市における，やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。表 1 を用いると，地域 E における，やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

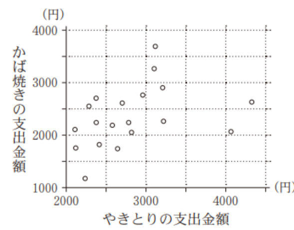


図 4　地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図

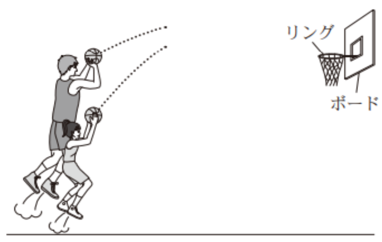
表 1　地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の平均値，分散，標準偏差および共分散

	平均値	分　散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	124000
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑨ のうちから一つ選べ。

⓪ -0.62	① -0.50	② -0.37	③ -0.19	④ -0.02
⑤ 0.02	⑥ 0.19	⑦ 0.37	⑧ 0.50	⑨ 0.62

〔2〕太郎さんと花子さんは，バスケットボールのプロ選手の中には，リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り，シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。二人は，図 1 のように座標軸が定められた平面上に，プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき，ボールがリングに入った場合について，後の**仮定**を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図

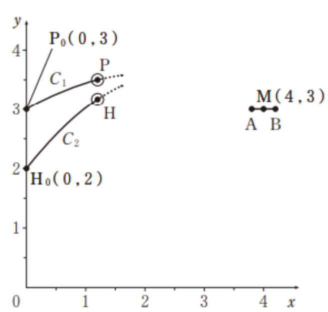


図　1

仮定

・平面上では，ボールは直径 0.2 の円とする。
・リングを真横から見たときの左端を $\mathrm{A}(3.8, 3)$，右端を $\mathrm{B}(4.2, 3)$ とし，リングの太さは無視する。
・ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り，かつ，ボールの中心が AB の中点 $\mathrm{M}(4, 3)$ を通る場合を考える。ただし，ボールがリングに当たるとは，ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
・プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし，P は，はじめに点 $\mathrm{P}_0(0, 3)$ にあるものとする。また，P_0, M を通る，上に凸の放物線を C_1 とし，P は C_1 上を動くものとする。
・花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし，H は，はじめに点 $\mathrm{H}_0(0, 2)$ にあるものとする。また，H_0, M を通る，上に凸の放物線を C_2 とし，H は C_2 上を動くものとする。
・放物線 C_1 や C_2 に対して，頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし，頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

(1) 放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。
放物線 C_1 の方程式は $y = ax^2 - \boxed{\text{キ}}\,ax + \boxed{\text{ク}}$ と表すことができる。
また，プロ選手の「シュートの高さ」は $-\boxed{\text{ケ}}\,a + \boxed{\text{コ}}$ である。
放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は
$y = p\left\{x - \left(2 - \dfrac{1}{8p}\right)\right\}^2 - \dfrac{(16p-1)^2}{64p} + 2$ と表すことができる。プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として，次の⓪〜③のうち，正しいものは $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」は，つねに一致する。
① プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。
② 花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。
③ プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもあれば，花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもある。

(2) 二人は，ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

太郎：例えば，プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには，P がリングの左端 A のどのくらい上を通れば良いのかな。
花子：A の真上の点で P が通る点 D を，線分 DM が A を中心とする半径 0.1 の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。
太郎：なるほど。P の軌道は上に凸の放物線で山なりだから，その場合，図 2 のように，P は D を通った後で線分 DM より上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も，H がこの D を通れば，ボールはリングに当たらないね。
花子：放物線 C_1 と C_2 が D を通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

図 2 のように，M を通る直線 l が，A を中心とする半径 0.1 の円に直線 AB の上側で接しているとする。また，A を通り直線 AB に垂直な直線を引き，l との交点を D とする。このとき，$\mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$ である。

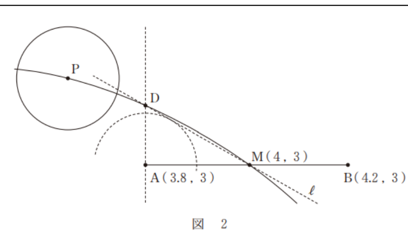


図 2

よって，放物線 C_1 が D を通るとき，C_1 の方程式は

$$y=-\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}(x^2-\boxed{\text{キ}}\,x)+\boxed{\text{ク}}$$ となる。

また，放物線 C_2 が D を通るとき，(1) で与えられた C_2 の方程式を用いると，花子さんの「**シュートの高さ**」は約 3.4 と求められる。以上のことから，放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき，プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比べると，$\boxed{\text{タ}}$ の「**シュートの高さ**」の方が大きく，その差はボール $\boxed{\text{チ}}$ である。なお，$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$ である。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

0 プロ選手	1 花子さん

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の 0 〜 3 のうちから一つ選べ。

0 約 1 個分	1 約 2 個分	2 約 3 個分	3 約 4 個分

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

番号によって区別された複数の球が，何本かのひもでつながれている。ただし，各ひもはその両端で二つの球をつなぐものとする。次の**条件**を満たす球の塗り分け方 (以下，球の塗り方) を考える。

条件

· それぞれの球を，用意した 5 色 (赤，青，黄，緑，紫) のうちのいずれか 1 色で塗る。
·1 本のひもでつながれた二つの球は異なる色になるようにする。
· 同じ色を何回使ってもよく，また使わない色があってもよい。

例えば図 A では，三つの球が 2 本のひもでつながれている。この三つの球を塗るとき，球 1 の塗り方が 5 通りあり，球 1 を塗った後，球 2 の塗り方は 4 通りあり，さらに球 3 の塗り方は 4 通りある。したがって，球の塗り方の総数は 80 である。

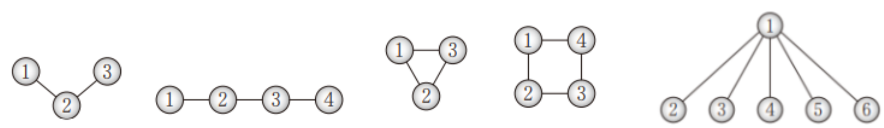


図 A　図 B　図 C　図 D　図 E

(1) 図 B において，球の塗り方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

(2) 図 C において，球の塗り方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある。

(3) 図 D における球の塗り方のうち，赤をちょうど 2 回使う塗り方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りある。

(4) 図 E における球の塗り方のうち，赤をちょうど 3 回使い，かつ青をちょうど 2 回使う塗り方は $\boxed{\text{クケ}}$ 通りある。

(5) 図 D において，球の塗り方の総数を求める。そのため，次の**構想**を立てる。

構想

図 D と図 F を比較する。

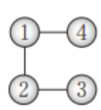
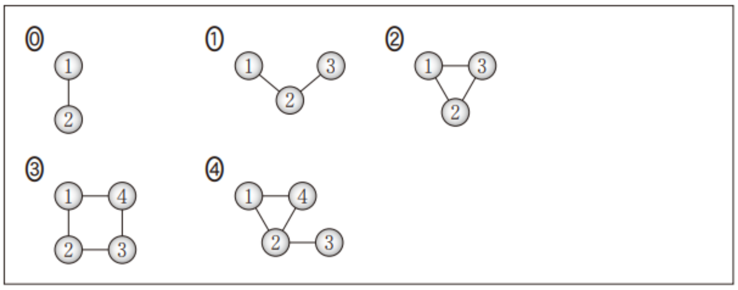


図 F

図 F では球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方が可能であるため，図 D よりも図 F の球の塗り方

の総数の方が大きい。図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，全部で **アイウ** 通りある。そのうち球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方の総数と一致する図として，後の⓪～④のうち，正しいものは **コ** である。したがって，図 D における球の塗り方は **サシス** 通りある。

コ の解答群



(6) 図 G において，球の塗り方は **セソタチ** 通りある。

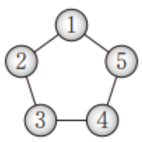


図　G

第 4 問　(選択問題) (配点 20)

色のついた長方形を並べて正方形や長方形を作ることを考える。色のついた長方形は，向きを変えずにすき間なく並べることとし，色のついた長方形は十分なあるものとする。

(1) 横の長さが 462 で縦の長さが 110 である赤い長方形を，図 1 のように並べて正方形や長方形を作ることを考える。462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは **アイ** である。赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが **ウエオカ** のものである。

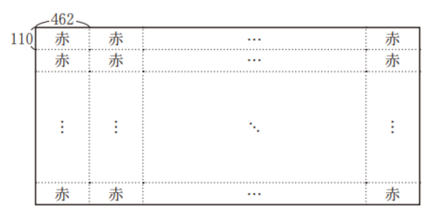


図　1

また，赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値が最小になるのは，462 の約数と 110 の約数を考えると，差の絶対値が **キク** になるときであることがわかる。縦の長さが横の長さより **キク** 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものは，横の長さが **ケコサシ** のものである。

(2) 花子さんと太郎さんは，(1) で用いた赤い長方形を 1 枚以上並べて長方形を作り，その右側に横の長さが 363 で縦の長さが 154 である青い長方形を 1 枚以上並べて，図 2 のような正方形や長方形を作ることを考えている。

このとき，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって，図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，縦の長さが $\boxed{\text{スセソ}}$ のものであり，図 2 のような長方形は縦の長さが $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数である。

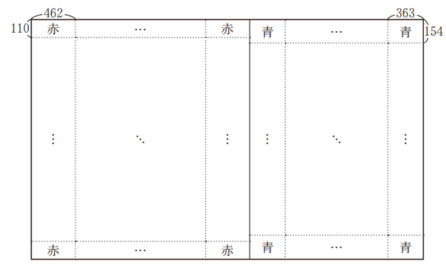


図　2

二人は次のように話している。

花子：赤い長方形と青い長方形を図 2 のように並べて正方形を作ってみようよ。 太郎：赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから，図 2 のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。 花子：正方形だから，横の長さは $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数でもないといけないね。

462 と 363 の最大公約数は $\boxed{\text{タチ}}$ であり，$\boxed{\text{タチ}}$ の倍数のうちで $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数でもある最小の正の整数は $\boxed{\text{ツテトナ}}$ である。これらのことと，使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も 1 枚以上であることから，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが $\boxed{\text{ニヌネノ}}$ のものであることがわかる。

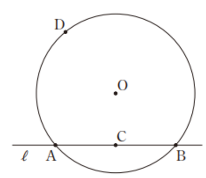
第 5 問　(選択問題) (配点 20)

(1) 円 O に対して，次の**手順** 1 で作図を行う。

手順 1

(Step1) 円 O と異なる 2 点で交わり，中心 O を通らない直線 l を引く。
　　円 O と直線 l との交点を A,B とし，線分 AB の中点 C をとる。
(Step2) 円 O の周上に，点 D を $\angle$COD が鈍角となるようにとる。
　　直線 CD を引き，円 O との交点で D とは異なる点を E とする。
(Step3) 点 D を通り直線 OC に垂直な直線を引き，直線 OC との交点を F とし，
　　円 O との交点で D とは異なる点を G とする。
(Step4) 点 G における円 O の接線を引き，直線 l との交点を H とする。

このとき，直線 l と点 D の位置によらず，直線 EH は円 O の接線である。このことは，次の**構想**に基づいて，後のように説明できる。



参考図

構想

直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，$\angle$OEH $=$ $\boxed{\text{アイ}}$ $^\circ$ であることを示せばよい。

手順 1 の (Step1) と (Step4) により，4 点 C,G,H, $\boxed{\text{ウ}}$ は同一円周上にあることがわかる。よって，$\angle$CHG $=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。一方，点 E は円 O の周上にあることから，$\boxed{\text{エ}}$ $=$ $\boxed{\text{オ}}$ がわかる。よって，$\angle$CHG $=$ $\boxed{\text{オ}}$ であるので，4 点 C,G,H, $\boxed{\text{カ}}$ は同一円周上にあることがわかる。この円が点 $\boxed{\text{ウ}}$ を通ることにより，$\angle$OEH $=$ $\boxed{\text{アイ}}$ $^\circ$ を示すことができる。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ B	① D	② F	③ O

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ ∠AFC	① ∠CDF	② ∠CGH	③ ∠CBO	④ ∠FOG

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ ∠AED	① ∠ADE	② ∠BOE	③ ∠DEG	④ ∠EOH

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ A	① D	② E	③ F

(2) 円 O に対して，次の**手順** 1 とは直線 l の引き方を変え，次の**手順** 2 で作図を行う。

手順 2

(Step1) 円 O と共有点をもたない直線 l を引く。
中心 O から直線 l に垂直な直線を引き，直線 l との交点を P とする。
(Step2) 円 O の周上に，点 Q を ∠POQ が鈍角となるようにとる。
直線 PQ を引き，円 O との交点で Q とは異なる点を R とする。
(Step3) 点 Q を通り直線 OP に垂直な直線を引き，
円 O との交点で Q とは異なる点を S とする。
(Step4) 点 S における円 O の接線を引き，直線 l との交点を T とする。

このとき，∠PTS $=$ $\boxed{\text{キ}}$ である。円 O の半径が $\sqrt{5}$ で，OT $= 3\sqrt{6}$ であったとすると，3 点 O,P,R を通る円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ であり，RT $=$ $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ ∠PQS	① ∠PST	② ∠QPS	③ ∠QRS	④ ∠SRT

数学II・数学B (60 分 , 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕三角関数の値の大小関係について考えよう。

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x$ $\boxed{\text{ア}}$ $\sin 2x$ であり，$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x$ $\boxed{\text{イ}}$ $\sin 2x$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(2) $\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。$\sin 2x - \sin x = \sin x\left(\boxed{\text{ウ}}\cos x - \boxed{\text{エ}}\right)$ であるから，$\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは

「$\sin x > 0$　かつ $\boxed{\text{ウ}}\cos x - \boxed{\text{エ}} > 0$」…①　または

「$\sin x < 0$　かつ $\boxed{\text{ウ}}\cos x - \boxed{\text{エ}} < 0$」…②

が成り立つことと同値である。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，

①が成り立つような x の値の範囲は $0 < x < \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，

②が成り立つようなxの値の範囲は $\pi < x < \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ である。

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$0 < x < \dfrac{\pi}{\boxed{オ}}, \pi < x < \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ である。

(3) $\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。三角関数の加法定理を用いると，
等式 $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \cdots$③ が得られる。$\alpha+\beta = 4x, \alpha-\beta = 3x$ を満たす α, β に対して③ を用いることにより，$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

「$\cos \boxed{ク} > 0$ かつ $\sin \boxed{ケ} > 0$」 …④ または

「$\cos \boxed{ク} < 0$ かつ $\sin \boxed{ケ} < 0$」 …⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，④,⑤により,, $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$0 < x < \dfrac{\pi}{\boxed{コ}}, \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi < x < \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\pi$ である。

$\boxed{ク}$ ， $\boxed{ケ}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① x	② $2x$	③ $3x$
④ $4x$	⑤ $5x$	⑥ $6x$	⑦ $\dfrac{x}{2}$
⑧ $\dfrac{3}{2}x$	⑨ $\dfrac{5}{2}x$	ⓐ $\dfrac{7}{2}x$	ⓑ $\dfrac{9}{2}x$

(4) (2)，(3) の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は $\dfrac{\pi}{\boxed{コ}} < x < \dfrac{\pi}{\boxed{ソ}}, \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\pi < x < \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\pi$ であることがわかる。

〔2〕(1) $a > 0, a \neq 1, b > 0$ のとき，$\log_a b = x$ とおくと， $\boxed{ツ}$ が成り立つ。

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ $x^a = b$	① $x^b = a$	② $a^x = b$
③ $b^x = a$	④ $a^b = x$	⑤ $b^a = x$

(2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i) $\log_5 25 = \boxed{テ}, \log_9 27 = \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ であり，どちらも有理数である。

(ii) $\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。
$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3 > 0$ であるので，二つの自然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表すことができる。このとき，(1) により $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ は $\boxed{ニ}$ と変形できる。いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので， $\boxed{ニ}$ を満たす自然数 p, q は存在しない。したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $p^2 = 3q^2$	① $q^2 = p^3$	② $2^q = 3^p$
③ $p^3 = 2q^3$	④ $p^2 = q^3$	⑤ $2^p = 3^q$

(iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき，(ii) と同様に考えると，
「$\boxed{ヌ}$ ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ a が偶数	① b が偶数
② a が奇数	③ b が奇数
④ a と b がともに偶数， または a と b がともに奇数	⑤ a と b のいずれか一方が偶数で もう一方が奇数

第 2 問　(必答問題)(配点 30)

〔1〕(1) k を正の定数とし，3 次関数 $f(x) = x^2(k-x)$ を考える。$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0, 0)$ と $(\boxed{\text{ア}}, 0)$ である。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$f'(x) = \boxed{\text{イウ}}\,x^2 + \boxed{\text{エ}}\,kx$ である。

$x = \boxed{\text{オ}}$ のとき，$f(x)$ は極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

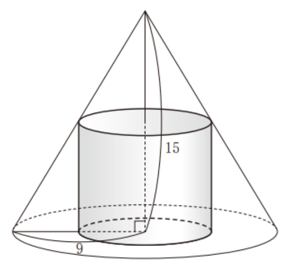
$x = \boxed{\text{キ}}$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

また，$0 < x < k$ の範囲において $x = \boxed{\text{キ}}$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① $\frac{1}{3}k$	② $\frac{1}{2}k$	③ $\frac{2}{3}k$
④ k	⑤ $\frac{3}{2}k$	⑥ $-4k^2$	⑦ $\frac{1}{8}k^2$
⑧ $\frac{2}{27}k^3$	⑨ $\frac{4}{27}k^3$	ⓐ $\frac{4}{9}k^3$	ⓑ $4k^3$

(2)



図のように底面が半径 9 の円で高さが 15 の円錐に内接する円柱を考える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x, V とする。V を x の式で表すと

$V = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi x^2(\boxed{\text{サ}} - x)$　$(0 < x < 9)$ である。

(1) の考察より，$x = \boxed{\text{シ}}$ のとき V は最大となることがわかる。V の最大値は $\boxed{\text{スセソ}}\,\pi$ である。

〔2〕(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x + 3\right)dx$ の値は $\boxed{\text{タチツ}}$ である。また，関数 $\dfrac{1}{100}x^2 - \dfrac{1}{6}x + 5$ の不定積分は $\displaystyle\int\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx = \frac{1}{\boxed{\text{テトナ}}}x^3 - \frac{1}{\boxed{\text{ニヌ}}}x^2 + \boxed{\text{ネ}}\,x + C$ である。

ただし，C は積分定数とする。

(2) ある地域では，毎年 3 月頃「ソメイヨシノの開花予想日」が話題になる。太郎さんと花子さんは，開花日時を予想する方法の一つに，2 月に入ってからの気温を時間の関数とみて，その関数を積分した値をもとにする方法があることを知った。ソメイヨシノの開花日時を予想するために，二人は図 1 の 6 時間毎の気温の折れ線グラフを見ながら，次のように考えることにした。

x の値の範囲を 0 以上の実数全体として，2 月 1 日午前 0 時から $24x$ 時間経った時点を x 日後とする。(例えば，10.3 日後は 2 月 11 日午前 7 時 12 分を表す。) また，x 日後の気温を y ℃とする。このとき，y は x の関数であり，これを $y = f(x)$ とおく。ただし，y は負にはならないものとする。

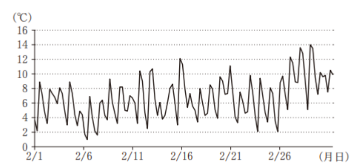


図 1　6 時間ごとの気温の折れ線グラフ

気温を表す関数 $f(x)$ を用いて二人はソメイヨシノの開花日時を次の**設定**で考えることにした。

設定

正の実数 t に対して，$f(x)$ を 0 から t まで積分した値を $S(t)$ とする。すなわち，$S(t)=\int_0^t f(x)dx$ とする。この $S(t)$ が 400 に到達したとき，ソメイヨシノが開花する。

設定のもと，太郎さんは気温を表す関数 $y=f(x)$ のグラフを図 2 のように直線とみなしてソメイヨシノの開花日時を考えることにした。

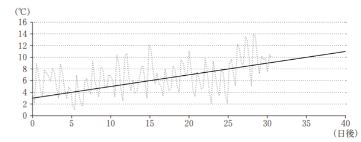


図 2　図 1 のグラフと，太郎さんが直線とみなした $y=f(x)$ のグラフ

(i) 太郎さんは $f(x)=\dfrac{1}{5}x+3\ (x \geqq 0)$ として考えた。このとき，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから $\boxed{\text{ノ}}$ となる。

$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群

⓪ 30 日後	① 35 日後	② 40 日後	③ 45 日後
④ 50 日後	⑤ 55 日後	⑥ 60 日後	⑦ 65 日後

(ii) 太郎さんと花子さんは，2 月に入ってから 30 日後以降の気温について話をしている。

> 太郎：1 次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めてみたよ。
> 花子：気温の上がり方から考えて，2 月に入ってから 30 日後以降の気温を表す関数が 2 次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数 $f(x)$ を，$0 \leqq x \leqq 30$ のときは太郎さんと同じように $f(x)=\dfrac{1}{5}x+3\cdots①$　とし，$x \geqq 30$ のときは $f(x)=\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5\cdots②$　として考えた。なお，$x=30$ のとき①の右辺の値と②の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて，ソメイヨシノの開花日時を考えよう。(1) より $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\boxed{\text{タチツ}}$ であり $\displaystyle\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$ となることがわかる。また，$x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって，$\displaystyle\int_{30}^{40}f(x)\ \boxed{\text{ハ}}\ \int_{40}^{50}f(x)$ であることがわかる。

以上より，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから $\boxed{\text{ヒ}}$ となる。

$\boxed{\text{ハ}}$ の解答群

⓪ <	① ＝	② >

$\boxed{\text{ヒ}}$ の解答群

⓪ 30 日後より前	① 30 日後
② 30 日後より後，かつ 40 日後より前	③ 40 日後
④ 40 日後より後，かつ 50 日後より前	⑤ 50 日後
⑥ 50 日後より後，かつ 60 日後より前	⑦ 60 日後
⑧ 60 日後より後	

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表 (本誌割愛) を用いてもよい。

(1) ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし，この母集団におけるピーマン 1 個の重さ (単位は g) を表す確率変数を X とする。m と σ は正の実数とし，X は正規分布 $N\left(m, \sigma^2\right)$ に従うとする。

(i) この母集団から 1 個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが mg 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は $P(X \geqq m) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \geqq \boxed{\text{ア}}\right) = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(ii) 母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均を $\overline{X}$ とする。$\overline{X}$ の平均 (期待値) と標準偏差はそれぞれ $E(\overline{X}) = \boxed{\text{エ}}$，$\sigma(\overline{X}) = \boxed{\text{オ}}$ となる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ σ	① σ^2	② $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$
④ m	⑤ $2m$	⑥ m^2	⑦ $\sqrt{m}$
⑧ $\dfrac{\sigma}{n}$	⑨ $n\sigma$	ⓐ nm	ⓑ $\dfrac{m}{n}$

$n = 400$，標本平均が 30.0g，標本の標準偏差が 3.6g のとき，m の信頼度 90% の信頼区間を次の**方針**で求めてみよう。

方針

Z を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数として，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度 90.1% の信頼区間が求められるが，これを信頼度 90% の信頼区間とみなして考える。

方針において，$z_0 = \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}}$ である。

一般に，標本の大きさ n が大きいときには，母標準偏差の代わりに，標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。$n = 400$ は十分に大きいので，**方針**に基づくと，m の信頼度 90% の信頼区間は $\boxed{\text{ケ}}$ となる。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $28.6 \leqq m \leqq 31.4$	① $28.7 \leqq m \leqq 31.3$	② $28.9 \leqq m \leqq 31.1$
③ $29.6 \leqq m \leqq 30.4$	④ $29.7 \leqq m \leqq 30.3$	⑤ $29.9 \leqq m \leqq 30.1$

(2) (1) の確率変数 X において，$m = 30.0, \sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを 1 個ずつ抽出し，ピーマン 2 個を 1 組にしたものを袋に入れていく。このようにしてピーマン 2 個を 1 組にしたものを 25 袋作る。その際，1 袋ずつの重さの分散を小さくするために，次の**ピーマン分類法**を考える。

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて，重さが 30.0g 以下のときを S サイズ，30.0g を超えるときは L サイズと分類する。そして，その分類されたピーマンから S サイズと L サイズのピーマンを一つずつ選び，ピーマン 2 個を 1 組とした袋を作る。

(i) ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率 p_0 を考えよう。無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とする

と，U_0 は二項分布 $B\left(50, \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{\boxed{\text{シス}}} \times \left(\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{シス}}} \times \left(1 - \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{50-\boxed{\text{シス}}} \text{ となる。}$$

p_0 を計算すると，$p_0 = 0.1122\cdots$ となることから，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる。

(ii) **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率が 0.95 以上となるようなピーマンの個数を考えよう。k を自然数とし，ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k, \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ に従う。$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布 $N\left(\boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}}\right)$ に従い，

$Y = \dfrac{U_k - \boxed{\text{セ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}$ とすると，Y は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

よって，**ピーマン分類法**で，25 袋作ることができる確率を p_k とすると

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k) = P\left(-\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50+k}}\right) \text{ となる。}$$

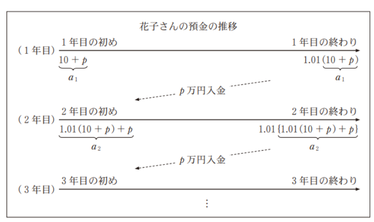
$\boxed{\text{タ}} = \alpha$，$\sqrt{50+k} = \beta$ とおく。$p_k \geqq 0.95$ になるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について，正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる。ここでは $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 2 \cdots$① を満たす自然数 k を考えることとする。①の両辺は正であるから，$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると，$k_0 = \boxed{\text{チツ}}$ であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{チツ}}$ の計算においては，$\sqrt{51} = 7.14$ を用いてもよい。したがって，少なくとも $\left(50 + \boxed{\text{チツ}}\right)$ 個のピーマンを抽出しておけば，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。

$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ k	① $2k$	② $3k$	③ $\dfrac{50+k}{2}$
④ $\dfrac{25+k}{2}$	⑤ $25+k$	⑥ $\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}$	⑦ $\dfrac{50+k}{4}$

第 4 問　(選択問題) (配点 20)

花子さんは，毎年初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は 10 万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利 1% で利息がつき，ある年の初めの預金が x 万円であれば，その年の終わりには預金は $1.01x$ 万円となる。次の年の初めには $1.01x$ 万円に入金額を加えたものが預金となる。



参考図

毎年初めの入金額を p 万円とし，n 年目の初めの預金を a_n 万円とおく。ただし，$p > 0$ とし，n は自然数とする。例えば，$a_1 = 10 + p$，$a_2 = 1.01(10+p) + p$ である。

(1) a_n を求めるために二つの方針で考える。

方針 1

n 年目の初めの預金と $(n+1)$ 年目の初めの預金との関係に着目して考える。

3 年目の初めの預金 a_3 万円について，$a_3 =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。すべての自然数 n について $a_{n+1} + \boxed{\text{イ}}\, a_n + \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。これは $a_{n+1} + \boxed{\text{エ}} = \boxed{\text{オ}} \left(a_n + \boxed{\text{エ}}\right)$ と変形でき，a_n を求めることができる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $1.01\{1.01(10+p)+p\}$	① $1.01\{1.01(10+p)+1.01p\}$
② $1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$	③ $1.01\{1.01(10+p)+p\}+1.01p$
④ $1.01(10+p)+1.01p$	⑤ $1.01(10+1.01p)+1.01p$

$\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1.01	① 1.01^{n-1}	② 1.01^{n}
③ p	④ $100p$	⑤ np
⑥ $100np$	⑦ $1.01^{n-1}\times 100p$	⑧ $1.01^{n}\times 100p$

方針 2

もともと預金口座にあった 10 万円と毎年初めに入金した p 万円について，n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

もともと預金口座にあった 10 万円は，2 年目の初めには 10×1.01 万円になり，3 年目の初めには 10×1.01^2 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10\times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

・1 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{\boxed{\text{カ}}}$ 万円になる。

・2 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{\boxed{\text{キ}}}$ 万円になる。

⋮

・n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$a_n = 10\times 1.01^{n-1} + p\times 1.01^{\boxed{\text{カ}}} + p\times 1.01^{\boxed{\text{キ}}} + \cdots + p$$
$$= 10\times 1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{\text{ク}}}$$

となることがわかる。ここで，$\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{\text{ク}}} = \boxed{\text{ケ}}$ となるので，a_n を求めることができる。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $n+1$	① n	② $n-1$	③ $n-2$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $k+1$	① k	② $k-1$	③ $k-2$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ 100×1.01^{n}	① $100(1.01^{n}-1)$	② $100(1.01^{n-1}-1)$
③ $n+1.01^{n-1}-1$	④ $0.01(101n-1)$	⑤ $\dfrac{n\times 1.01^{n-1}}{2}$

(2) 花子さんは，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと $\boxed{\text{コ}} \geqq 30$ となる。この不等式を p について解くと $p \geqq \dfrac{\boxed{\text{サシ}} - \boxed{\text{スセ}}\times 1.01^{10}}{101\left(1.01^{10}-1\right)}$ となる。したがって，毎年の初めの入

金額が例えば 18000 円であれば，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になることがわかる。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ a_{10}	① $a_{10}+p$	② $a_{10}-p$
③ $1.01a_{10}$	④ $1.01a_{10}+p$	⑤ $1.01a_{10}-p$

(3) 1 年目の入金を始める前における花子さんの預金が 10 万円ではなく，13 万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して，この場合の n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $\boxed{\text{ソ}}$ 万円多い。なお，年利は 1% であり，毎年の初めの入金額は p 万円のままである。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 3	① 13	② $3(n-1)$	③ $3n$
④ $13(n-1)$	⑤ $13n$	⑥ 3^n	⑦ $3+1.01(n-1)$
⑧ $3\times1.01^{n-1}$	⑨ 3×1.01^{n}	ⓐ $13\times1.01^{n-1}$	ⓑ 13×1.01^{n}

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

三角錐 PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PAC}$ とし，この角度を θ とおく。ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。

また $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\boxed{\text{オ}}\cdots①$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $\sin\theta$	① $\cos\theta$	② $\tan\theta$
③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$	④ $\dfrac{1}{\cos\theta}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\theta}$
⑥ $\sin\angle\mathrm{BPC}$	⑦ $\cos\angle\mathrm{BPC}$	⑧ $\tan\angle\mathrm{BPC}$

(2) $\theta=45^\circ$ とし，さらに $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=3\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3$ が成り立つ場合を考える。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{カ}}$ である。さらに，直線 AM 上の点 D が $\angle\mathrm{APD}=90^\circ$ を満たしているとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ で定まる点を Q とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直である三角錐 PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば (2) の場合では，点 Q は点 D と一致し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表して考えると，$\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。さらに①に注意すると，$\boxed{\text{ク}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つことがわかる。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であれば，$\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。

逆に，$\boxed{\text{ケ}}$ が成り立てば，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$	① $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
② $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$	③ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
④ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|+\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|=\sqrt{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|$	① $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|+\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|=2\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|$
② $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|\sin\theta+\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|\sin\theta=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|$	③ $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|\cos\theta+\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|\cos\theta=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|$
④ $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|\sin\theta=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|\sin\theta=2\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|$	⑤ $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|\cos\theta=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|\cos\theta=2\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|$

(ii) k を正の実数とし $k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つとする。このとき，$\boxed{\text{コ}}$ が成り立つ。また，点 B から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を B' とし，同様に点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C' とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{サ}}$ であることと同値である。特に $k=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{シ}}$ であることと同値である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$	① $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$
② $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|=\sqrt{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|$	③ $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|=\sqrt{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ B' と C' がともに線分 AP の中点
① B' と C' が線分 AP をそれぞれ $(k+1):1$ と $1:(k+1)$ に内分する点
② B' と C' が線分 AP をそれぞれ $1:(k+1)$ と $(k+1):1$ に内分する点
③ B' と C' が線分 AP をそれぞれ $k:1$ と $1:k$ に内分する点
④ B' と C' が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点
⑤ B' と C' がともに線分 AP を $k:1$ に内分する点
⑥ B' と C' がともに線分 AP を $1:k$ に内分する点

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PAC}$ がともに正三角形
① $\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PAC}$ がそれぞれ $\angle\mathrm{PBA}=90^\circ$，$\angle\mathrm{PCA}=90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形
② $\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PAC}$ がそれぞれ $\mathrm{BP}=\mathrm{BA}$，$\mathrm{CP}=\mathrm{CA}$ を満たす二等辺三角形
③ $\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PAC}$ が合同
④ $\mathrm{AP}=\mathrm{BC}$