対偶と背理法，反例

市川工業高等学校　氏家 悟

1　はじめに

2016 年 10 月当時の所属[1]で，教科書と問題集にあった対偶の練習問題のすべてと，それに少し命題を加えたものに，普通の証明，対偶の証明，背理法の証明を付けたものをプリントにして配布した。さらに，3 年生の授業で，数学 I の復習としても配布した。

プリントでは優先順位をはっきりさせるために命題 p の否定に $\neg p$ を用いたが，本稿では教科書のように否定を $\overline{p}$ と書く。その他プリントで用いた $\Rightarrow$（ならば），$\wedge$（かつ），$\vee$（または）は本稿でも用いる。

当時の教科書の例題にあった対偶を用いた証明問題で，$\sqrt{2}$ は無理数である証明に使われる命題である。

命題 1　n は整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数である。
(証明)$(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 対偶「n が奇数ならば，n^2 は奇数である。」を示す。
奇数 n は，ある整数を k として $n = 2k+1$ と表され，$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ は奇数である。よって，対偶が真であり，元の命題も真である。

これを，対偶を使わなければ，

(証明) $(p \Rightarrow q)$ k を整数として，すべての整数は次の (ア)，(イ) に分けられる。
(ア) $n = 2k$ のとき，$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ は偶数である。
(イ) $n = 2k+1$ のとき，$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ より，n^2 は奇数である。
したがって，n^2 が偶数になるのは，n が偶数であるときに限られるので，n^2 が偶数ならば，n は偶数である。

「すべての整数」を場合分けして調べ尽くすという方針である。つまり，「n は整数とする。」で全体集合を述べ，その全体集合の場合分けである。

場合分けを知らずに，$n^2 = 2k$ と置いて，$n = \sqrt{2k}$ から手も足も出なくなっている答案を目にはするが。

これを背理法で証明すると，

[1] 磯辺高等学校

(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$「n^2 が偶数であって，n は奇数である」とする。
奇数 n は k をある整数として $n = 2k+1$ と表され，$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ より，n^2 も奇数である。

これは，n^2 が偶数であることに矛盾する。ゆえに，n^2 が偶数ならば，n は偶数である。

背理法の仮定は，反例の作り方と同じである。反例を挙げようとして，矛盾を導く証明法と言える。計算自体は，対偶の証明と大差ないため，その区別こそが論理の表現力と言える。

2　3 通りの証明

以下，プリントに掲載した命題の証明を見てみる。命題 1 の教科書の「練習」では偶数が奇数となっていて，こちらもプリントに 3 通りの証明を載せたが，本稿では省略する。

命題 2　$x + y > 0$ ならば $x > 0$ または $y > 0$
(証明) $(p \Rightarrow q)$ 実数 x を（ア）$x > 0$ の場合と（イ）$x \leqq 0$ の場合に分ける。
（ア）$x > 0$ を仮定した場合,「$x > 0$ または $y > 0$」は明らかに成り立つ。
（イ）$x \leqq 0$ のとき，$-x \geqq 0$ である。また，$x + y > 0$ より，$y > -x$ である。よって，$y > -x \geqq 0$ となり，$y > 0$ である。
（ア）（イ）より，$x + y > 0 \Rightarrow x > 0$ または $y > 0$
(証明) 対偶 $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0 \Rightarrow x + y \leqq 0$」
$x \leqq 0$ の両辺に y を加えて，$x + y \leqq 0 + y = y, y \leqq 0$ より，$x + y \leqq 0.$
(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$ 「$x + y > 0$ であって，$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」

$x \leqq 0$ の両辺に y を加えて，$x + y \leqq 0 + y = y, y \leqq 0$ より，$x + y \leqq 0$ これは，$x + y > 0$ に矛盾する。

「（ア）$x > 0$ を仮定した場合，$x > 0$ または $y > 0$ は明らかに成り立つ。」はトートロジー $p \Rightarrow p \vee q$ であるが，この論理構造については後述。
「$x > 0$ または $y > 0$」の否定はド・モルガンの法則で,「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」

命題 3　n を整数とするとき，$5n + 2$ が奇数ならば，n は奇数である.
(証明) $(p \Rightarrow q)$ 整数 n を（ア）偶数の場合と（イ）奇数の場合に分ける.
(証明) 対偶 $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 「n が偶数ならば，$5n + 2$ は偶数である.」(以下略)
(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$ 「$5n + 2$ が奇数であって，n が偶数である.」(以下略)

命題 3 は，命題 1 と大差なく，その練習問題である。

命題 4　$x^3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$
(証明) 対偶 $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 「$x = 1 \Rightarrow x^3 = 1$ 」
$x = 1$ ならば，$x^3 = 1^3 = 1$ より成り立つ。
(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$ 「$x = 1$ であって $x^3 \neq 1$」
$x = 1$ ならば，$x^3 = 1^3 = 1$ より，$x^3 \neq 1$ に矛盾する。

命題 4 は，対偶が（背理法も）極めて易しく，対偶の威力が分かる例である。対して，$p \Rightarrow q$ の証明はかなり面倒といえる。

(証明) ($p \Rightarrow q$)
$x^3 \neq 1 \Rightarrow x^3 - 1 \neq 0 \cdots$①
恒等式より① $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) \neq 0 \cdots$②
$0 = 0(x^2+x+1) \cdots$③
より，②の右辺の 0 を③で書き換え，$(x-1)(x^2+x+1) \neq 0(x^2+x+1)$
$(x-1)(x^2+x+1) \neq 0(x^2+x+1) \Rightarrow x-1 \neq 0 \cdots$④
よって，$x \neq 1$

① は等式の性質 $a=b \Rightarrow a+c=b+c$ の対偶 $a+c \neq b+c \Rightarrow a \neq b$ である。

③は 0 の性質 $0a=0$

④ は等式の性質 $a=b \Rightarrow ac=bc$ の対偶 $ac \neq bc \Rightarrow a \neq b$ である。

このように，等式の性質の対偶を使うという点で，高校生には説明が難しいと思うし，はじめから命題の対偶を使えばよいともいえる。

さらに，等式の性質の対偶を使わなければ，命題 2 のような実数全体の場合分けである。プリントにしたときは，$x=1$，$x \neq 1$ に場合分けし，さらに，$x \neq 1$ の場合を不等式で場合分けしたが，入れ子構造になってわかりづらかったので，本稿では初めから 5 パターンに場合分けした。

(証明) ($p \Rightarrow q$) 実数 x を（ア）$1<x$，（イ）$x=1$，（ウ）$0<x<1$，（エ）$x=0$，（オ）$x<0$ の場合に分ける。
（ア）$1<x$ のとき，$x>0$ であるから，$1<x$ の両辺に x かけても不等号は変わらないから $x<x^2$ より $1<x^2$. さらに，x かけても不等号は変わらないから $x<x^3$ より $1<x^3$，したがって $x \neq 1$
（イ）$x=1$ のとき，$x^3=1^3=1$.
（ウ）$0<x<1$ のとき，$x>0$ をかけても不等号はわからないから，$0x<x^2<1x$ より $0<x^2<x$，$0<x^2<1$. さらに $x>0$ をかけて $0x<x^3<1x^2$ より $0<x^3<1$ となり，$x^3 \neq 1$
（エ）$x=0$ のとき $x^3=0^3=0 \neq 1$
（オ）$x<0$ のとき，$x^2>0$ を両辺にかけても不等号はかわらないから $x^3<0x^2$ より $x^3<0$，したがって $x^3 \neq 1$

以上，$x^3=1$ となるのは，$x=1$ のときに限るので，$x^3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

「こんなに大変」を見せるだけで対偶の証明の威力がわかる。

以下は，問題集などにあったものではなかったが，「場合分け」の 3 年生の説明用に掲載した。「場合分け」の考え方は，記述式の入試で答案の構成能力につながると思うからである。

つぎの命題は「$\sqrt{3}$ が無理数である。」証明に用いられる。

命題 5　n を整数とするとき，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である.
(証明) ($p \Rightarrow q$)（ア）$n=3k$ の場合，（イ）$n=3k+1$，（ウ）$n=3k+2$ の場合に分ける。(中略) n^2 が 3 の倍数になるのは，（ア）$n=3k$ の場合に限るので，n は 3 の倍数。
(証明) 対偶 ($\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$)「$n$ は 3 の倍数でないならば，n^2 が 3 の倍数でない。」(証明略　これは上の，（イ）（ウ）にあたる。)
(証明) 背理法の仮定 ($p \wedge \overline{q}$)「n^2 は 3 の倍数であって，n が 3 の倍数でない。」(証明略　これは上の，（イ）（ウ）が n^2 は 3 の倍数であることに矛盾)

最後に，2 次方程式の解の根拠になる命題で，これが，「整数の場合分け」と同じような証明の仕組みを持っている。つまり，実数全体を 0 とそれ以外に場合分けし，その両方について示している。

命題 6　$ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$
(証明) $(p \Rightarrow q)$ （ア）$a=0$ の場合と（イ）$a \neq 0$ の場合に分ける。
（ア）$a=0$ ならば，$a=0$ または $b=0$ は成り立つ。$\cdots$①
（イ）$a \neq 0$ ならば，$ab=0$ より，両辺を a で割って，$b=0 \div a=0$ より成り立つ。

①は，命題 2 にも出てきたトートロジー $p \Rightarrow p \vee q$ である。トートロジーは恒真であるから，変項（変数）が何であっても，真である。

実際，$a=5$ を代入すると，「（ア）$5=0$ ならば，$5=0$ または $b=0$」は仮定が偽であるので，全体は真の命題であるし，$a=0, b=5$ を代入すると，「（ア）$0=0$ ならば，$0=0$ または $5=0$」において，結論の「または」は少なくとも一方が真であれば真なのであるから，全体は真の命題である。

自分が高校生の頃は「なぜ，場合分けするのだろう」と思い，さらに「ろくに計算もしていない①って，証明なのだろうか」とも思っていた。そもそも計算不要，論理構造だけから真と言える「トートロジー」なのであった。

真偽集合で考えても，$P \subset P \cup Q$ はいつも成り立つから，$p \Rightarrow p \vee q$ は恒真である。たとえ q が偽（$Q=\emptyset$）であっても，$P \subset P \cup \emptyset$ は成り立つ。

つまり「$a=0$ ならば $a=0$ または $b^2<0$」も真である。命題の必要条件が，「$a=0$ または $b=0$」だったので，なにを書いても全体が真になる命題 q に $b=0$ を代入したのである。

さて，命題 6 の対偶と背理法を示してみるが，まず，次のものは，証明になっていない。

(証明) 対偶 $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 「$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$」
$a \neq 0$ の両辺に b をかけて，$ab \neq 0b$ よって，$ab \neq 0$
(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$ 「$ab=0 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$」
$a \neq 0$ の両辺に b をかけて，$ab \neq 0b$ よって，$ab \neq 0$ これは $ab=0$ に矛盾。

実数の性質（公理系）には $\neq$ に関するものがない。せいぜい，等式の性質 $a=b \Rightarrow ac=bc$ の対偶 $ac \neq bc \Rightarrow a \neq b$ くらいだが，使いようがない。つまり $\neq 0$ から直接示すことはできない。

さらに，対象が実数に限らなければ，零因子（$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab=0$）を持つ環の場合があるから，この対偶や背理法による証明は，実数が順序体であること（つまり不等式）を用いるしかないので，厄介である。(参考文献 [1])

(証明) 対偶 $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ 「$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$」
（ア）$a > 0 \wedge b > 0$ の場合，（イ）$a > 0 \wedge b < 0$ の場合，（ウ）$a < 0 \wedge b > 0$ の場合，（エ）$a < 0 \wedge b < 0$ の場合に分ける。
（ア）$a > 0$ の両辺に $b > 0$ をかけても不等号の向きは変わらない。$ab > 0b$ ゆえに $ab > 0$ より $ab \neq 0$
（イ）$b < 0$ の両辺に $-b$ を足しても，不等号の向きは変わらない。$b + (-b) < 0 + (-b)$ より，$0 < -b$ で $-b$ は正の数。$a > 0$ の両辺に正の数 $(-b)$ をかけても不等号の向きは変わらない。$a(-b) > 0(-b)$ ゆえに $-ab > 0$，$ab < 0$ より $ab \neq 0$
（ウ）（エ）は省略。どの場合も，$ab \neq 0$ となる。
(証明) 背理法の仮定 $(p \wedge \overline{q})$ 「$ab = 0 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$」
（ア）$a > 0 \wedge b > 0$ の場合，（イ）$a > 0 \wedge b < 0$ の場合，（ウ）$a < 0 \wedge b > 0$ の場合，（エ）$a < 0 \wedge b < 0$ の場合に分ける。
どの場合も，$ab \neq 0$ となり（計算省略），$ab = 0$ と矛盾する。

3　「ならば」の否定

背理法の仮定は，命題を否定することであるが，「$p \Rightarrow q$」の否定「$\overline{p \Rightarrow q}$」を「$p \Rightarrow \overline{q}$」と思う勘違いはよく見かける。

特に背理法の例で扱われるのが，「$\sqrt{2}$ が無理数である」の否定の仮定が，「$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定する」だから，なおさらである。

つまり，もとの命題自体が「p ならば q」の文になっていないため，「q である」の否定が「q でない」に見えて，$p \Rightarrow q$ の否定が $p \Rightarrow \overline{q}$ と勘違いしてしまう。

「ならば」を用いて書き直せば，「$x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ は無理数 」となり，$x = \sqrt{2}$ を x は無理数に代入した形が，元の命題「$\sqrt{2}$ は無理数」となる。

これは，「$p \Rightarrow q$」と同値な命題が，「$\overline{p} \vee q$」であるからその否定「$\overline{p \Rightarrow q}$」と同値な命題が，「$\overline{\overline{p} \vee q}$」 $\iff$ 「$\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$」 $\iff$ 「$p \wedge \overline{q}$」であるからである。

そして，「ならば」の否定（背理法の仮定）は「$x = \sqrt{2} \ \wedge \ x$ は有理数 」であり，やはり，$x = \sqrt{2}$ を x は有理数 に代入した形が，否定命題なので，まるで，背理法の仮定が「$x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ は有理数 」であるように感じてしまうのである。

「$\overline{p \Rightarrow q} \iff p \wedge \overline{q}$」と「$p \Rightarrow \overline{q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}$」は同値ではないが，「$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$」と「$(p \wedge q) \Rightarrow r$」が同値なのも，影響しているかもしれない。

4　反例

「p ならば q」が偽の命題であることを示すとき，反例は「p であって q でない」となる具体的な例を 1 つ挙げることである。

教科書の背理法の例では勘違いが起きる例しか出てこないが，背理法より先に出てくる「反例」では，「p であって q でない」ものを示すように求められている。

そもそも，命題「p ならば q」が真で，命題に変数 x が含まれているとき，x は量化子で束縛

されていないので自由変項である。この場合，「$\forall x(p$ ならば $q)$」と量化子が導入される。この否定は，「$\exists x(\overline{p \text{ ならば } q})$」つまり，「$\exists x(p$ かつ$\overline{q})$」であるから，反例は 1 つ存在を言えれば，偽を示したことになるのである。

5 背理法

背理法は，$\sqrt{2}$ が無理数である証明くらいしか扱わないことが多いが，これでは，背理法の仕組みが見えづらいと感じていた。対偶の証明を，背理法やノーマルな証明に書き換え，さらに反例と対比させることで，論理の仕組みが分かりやすいと思い，本稿のようなプリントを作成した。

さて，背理法の仮定は「p ならば q」の否定「$p \wedge \overline{q}$」であるが，これは反例そのものである。

背理法の証明では，なにか，こねくりまわして，矛盾を導くことに違和感を感じることがあるようだ。というのも，数学の証明は普通「いつでも成り立つ」（つまり $\forall x$）ことを示しているのに対して，背理法の矛盾の指摘は極めて特殊なことをこじつけているように感じることだろう。これも，「反例は 1 つで示したことになる」のと同様，具体的な特殊な矛盾が 1 つでもあれば（$\exists x$），示したことになるのが背理法なのである。

この違和感を端に発したのが，排中律を（特に無限集合への適用を）制限した直観主義論理なのかもしれない。

参考文献

[1] 氏家悟，「不等式の公理」$\alpha - \omega$，59 号，2021.
http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joygk04uz-27#_27