数列の一般項から漸化式を眺める

千葉県立柏高等学校　川野哲嗣

1　はじめに

漸化式の解き方は教科書が与えているものより簡単な方法があることは，教員になってから学ぶことになりました。多項間漸化式へのいくつかのアプローチを例に挙げながら，高校生は受験に向かって，教員も数列について授業するとき，定期考査を作るとき，知っていて損はないなと思える内容を共有できたらと思います。

2　予備知識の確認

【問題１】※千葉 2015 (2) 略

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α , β とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定める。

このとき，次の問に答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を満たすことを示せ。

【問題１】について証明は代入して確認するだけで，難しいものではありません。特に，$a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と係数が 1 でなくとも同様に漸化式を満たします。このことを利用して，次の【問題２】を処理します。これは有名な方法であると思いますが，念のため確認しておきます。

【問題２】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=0,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(2) $a_1=0,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

【問題２】(1) について，特性方程式 $t^2-5t+6=0$ から解 $t=2,3$ を得て，数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n=A\cdot 3^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}$ とおき，$\begin{cases} a_1=A+B=0 \\ a_2=3A+2B=1 \end{cases}$ を解き，$A=1,\quad B=-1$ を得ることで，$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$ と求めることができます。教科書らしい式変形を施しなが

ら解く方法に比べて，格段に早く処理できるので，高校生でも知っていて損がないと思います。このような方法を考えるとき，記述でどうような採点をされるのか，必要十分な議論となっているかを気にすることもあると思いますが，多項間漸化式は暗算で解けてしまう程度のものだと思うなら，2 次方程式に対して解の公式を用いることと変わりないレベルだろうと考えています。

【問題 2】(2) について，特性方程式 $t^2-4t+4=0$ から重解 $t=2$ を得ます。この場合は，数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}$ とおくのではなく，$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$ とおくことに注意が必要です。これも定数変化法での処理になっていますが，ここでは説明を割愛します。【問題 1】では，この問題を解消するために $b^2+4c>0$ としてあります。一般項の形を決めた後，$\begin{cases} a_1 = A+B=0 \\ a_2 = 4A+2B=2 \end{cases}$ を解き，$A=1, B=-1$ を得ることで，$a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$ と求めることができます。$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$ が漸化式を満たすことは簡単に確認できます。これらの詳しい内容と数列に関する興味深い記事が $\alpha-\omega$2018 年 11 月号，2020 号 11 月号に掲載されています。

3　教科書が扱う漸化式への疑問

【問題 3】※だいたい次の順序ではないでしょうか。((7) はないと思います。)

(1) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=-2, a_{n+1}=3a_n$

(3) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2n-1$　　(4) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3^n$

(5) $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2$　　(6) $a_1=0, a_2=1, a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(7) $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+n-1$

【問題 3】は，感覚としては (2)，(6) と (1)，(3)，(4)，(5)，(7) に分類（斉次，非斉次の分類）できるのだと思っています。最も簡単な例として，(1)，(2) を扱うのは良いのかなと思いますが，階差数列を利用する (3)，(4) は生徒にとって理解の良いものではないように思えますし，体系的に漸化式を捉えられない印象で (5)，(6) とは切り離されたものになっていることに疑問を感じます。斉次な漸化式にすべて変形できるので，扱いを同じにすることが可能です。ここで書くべきことか分かりませんが，(5) について，$c=3c+2$ とする方程式は，与えられた漸化式を満たす定数列を探すもので，特性方程式ではありません。特性方程式だと書いている参考書があったりしますが，(7) について，同様に漸化式を満たす 1 次式を探す $a(n+1)+b=2(an+b)+n-1$ という式を特性方程式という感覚になるのですが，疑問です。

4　種々の漸化式の取り扱い

【問題３】に与えられる漸化式の一般項は文字係数 A，B を用いて，（同じ文字ですがそれぞれ別のものと見てもらって）形だけ確認すると，順に，

(1) $a_n = An \times 1^{n-1} + 3n$　(2) $a_n = A \times 3^{n-1}$　(3) $a_n = A \times 1^{n-1} + n^2 - 2n$　(4) $a_n = A \times 1^{n-1} + \dfrac{3^n}{2}$
(5) $a_n = A \times 3^{n-1} - 1$　(6) $a_n = A \times 5^{n-1} + B \times (-2)^{n-1}$　(7) $a_n = A \times 2^{n-1} - n$

となることをご存じの方も多いと思います。漸化式から一般項の形を決めることができれば，【問題２】のように，連立方程式を解けばよいことになります。

【問題４】※横浜市大 2016
n は自然数とする。漸化式 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n - 6n = 0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

特殊解と一般解を用いた一般項の考察は，過去の $\alpha - \omega$ の記事をご覧下さい。一般項の形は，斉次漸化式 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ の特性方程式 $t^2 - 5t + 6 = 0$ の解 $t = 2, 3$ と漸化式に与えられる $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n + f(n) = 0$ の $f(n)$ の形に依存しています。一般項は，$f(n)$ が 1 次式なので，$a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} + Cn + D$ で与えられます。$a_3 = 5, a_4 = 31$ を確認して A, B, C, D について連立方程式を解き，$A = \dfrac{7}{2}, B = -10, C = 3, D = \dfrac{9}{2}$ を得ます。したがって，$a_n = \dfrac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - 10 \cdot 2^{n-1} + 3n + \dfrac{9}{2}$ となります。

一般項の形は，$f(n)$ が n の 2 次式であれば，一般項も n の 2 次式の形を持ちます。$f(n)$ が q^n のような指数の形であれば，一般項は $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} + Cq^n$ の形となりますが，$q = 2$ または $q = 3$ の場合は，q 自体を重解とみなして，【問題２】(2) の置き方を採用することとなります。以下，例を扱います。

【問題５】
n は自然数とする。漸化式 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n - 3^n = 0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ の特性方程式 $t^2 - 5t + 6 = 0$ の解 $t = 2, 3$ と漸化式に含まれる 3^n の形から一般項は $a_n = (An + B) \cdot 3^{n-1} + C \cdot 2^{n-1}$ とおいて，$a_3 = 2$ と連立方程式から，$A = 1, B = -5, C = 5$ を得ます。したがって，一般項は $a_n = (n - 5) \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 2^{n-1}$ となります。ここまでの多くの内容は，有名ですが，これ以降の内容のために必要な予備知識となっています。

5　数列の一般項と漸化式の関係，多項間漸化式

【問題 6】※一般項を求めるわけではないので，初期条件を書きません。
(1) n は自然数とする。漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-3^n=0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が満たす 4 項間漸化式を求めよ。
(2) n は自然数とする。漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が満たす 5 項間漸化式を求めよ。

n について差分していくことで (1),(2) ともに処理します。

(1) について，$a_{n+3}-5a_{n+2}+6a_{n+1}-3^{n+1}=0$ から
$3a_{n+2}-15a_{n+1}+18a_n-3^{n+1}=0$ を引いて，
$a_{n+3}-8a_{n+2}+21a_{n+1}-18a_n=0$ 　を得ます。
(2) について，$a_{n+3}-5a_{n+2}+6a_{n+1}-6(n+1)=0$ から
$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0$ を引いて，
$a_{n+3}-6a_{n+2}+11a_{n+1}-6a_n-6=0$ 　を得ます。
さらに，$a_{n+4}-6a_{n+3}+11a_{n+2}-6a_{n+1}-6=0$ から
$a_{n+3}-6a_{n+2}+11a_{n+1}-6a_n-6=0$ を引いて，
$a_{n+4}-7a_{n+3}+17a_{n+2}-17a_{n+1}+6a_n=0$ 　を得ます。

(1) の 4 項間漸化式の特性方程式は，$t^3-8t^2+21t-18=0$ で，$t=2,3$ (3 は 2 重解) から一般項は $a_n=(An+B)\cdot 3^{n-1}+C\cdot 2^{n-1}$ とおけることは確認できます。

(2) の 5 項間漸化式の特性方程式は，$t^4-7t^3+17t^2-17t+6=0$ で，$t=1,2,3$ (1 は 2 重解) から一般項は $a_n=A\cdot 3^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}+(Cn+D)\cdot 1^{n-1}$ とおけることは確認できます。1 次式 $Cn+D$ の部分を $(Cn+D)\cdot 1^{n-1}$ とみるのがポイントです。(2) のようなとき，差分するたびに特性方程式の解 $t=1$ が増えていきます。

例えば，一般項に定数項があるような例 $a_n=3\cdot 2^n-5$ は $a_n=3\cdot 2^n-5\cdot 1^n$ と見れば，$t=1,2$ を解に持つ 2 次方程式 $t^2-3t+2=0$ を特性方程式とする漸化式 $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ を満たすことが分かります。以上の知識をもとに一般項が与えられた数列が満たす漸化式を復元する方法と，それがどんなときに便利かを確認しておきます。

【問題 7】※千葉大 2013
整数 $n \geqq 2$ に対して，$a_n=\dfrac{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}{4}$ をおく。
a_n は整数であり，3 で割った余りは 2 であることを示せ。【千葉大 2013】

$a_n=\dfrac{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}{4}=\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{3})^n+\dfrac{1}{4}(1-\sqrt{3})^n$ が満たす漸化式は，一般項が $a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ の形であることに注意すると，

係数 A, B は関係なく $\alpha+\beta=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2, \alpha\beta=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=2$ を確認して，$t=1\pm\sqrt{3}$ を解に持つ 2 次方程式 $t^2-2t-2=0$ を特性方程式とする 3 項間漸化式 $a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n$ を満たすことが分かります。2019 年に早稲田大学商学部の問題で漸化式の復元は実際に出題があります。$n \geqq 2$ で定義されていますが，$a_1=\dfrac{1}{2}$ を確認しておくと，対称式の値に関する処理として，$\dfrac{(1+\sqrt{3})^5+(1-\sqrt{3})^5}{4}=a_5$ の値などを対称式の面倒な変形をしないで求めることができます。ちなみに $a_1=\dfrac{1}{2}, a_2=2, a_3=5, a_4=14, a_5=38, \cdots$ と漸化式を利用して順次求めることができます。漸化式から明らかに $n \geqq 2$ のとき，a_n は整数で，漸化式 $a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n$ から $a_n \equiv 2(\mathrm{mod} 3)$, $a_{n+1} \equiv 2(\mathrm{mod} 3)$ を仮定しての数学的帰納法で【問題７】は処理できます。

【問題８】※東京工業大 2013
2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の倍数であることを示せ。

$a_n=\alpha^n+\beta^n-3^n$ が満たす漸化式は，一般項が $a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1}$ の形であることに注意すると，$t=\alpha, \beta, 3$ を解に持つ 3 次方程式 $(t-3)(t^2-3t+5)=0$ すなわち $t^3-6t^2+14t-15=0$ を特性方程式とする 4 項間漸化式 $a_{n+3}=6a_{n+2}-14a_{n+1}+15a_n$ を満たすことが分かります。$a_1=0, a_2=-15, a_3=-45$ を確認すれば，a_n は明らかに 5 の倍数となることが分かります。整数と漸化式に関する問題は合同式や最大公約数と関連しての出題が多いですが，直近では 2021 年東京大学で出題があり，定期的に出題されています。ここまで，脱線しながら漸化式に関する知識をまとめましたが，ここから本稿の本題に入っていきたいと思います。

6　隣接しない漸化式と一般項の場合分け

【問題９】n は自然数とする。
(1) 漸化式 $a_1=1, a_2=4, a_{n+2}=a_n+2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(2) 漸化式 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=2a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

一般的な解法といって良いか分かりませんが，(1)，(2) ともに偶奇での場合分けを考えてみます。念のためにそれぞれ書き並べてみると (1) は $1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, \cdots$,(2) は $1, 3, 2, 6, 4, 12, 8, 24, \cdots$ となります。
自然数 m について，(1) では，$a_{2m-1}=2m-1, a_{2m}=2m+2$ として，(2) では，$a_{2m-1}=2^{m-1}, a_{2m}=3\cdot 2^{m-1}$ と場合分けしておき，$n=2m-1, n=2m$ についてそれぞれ $m=\dfrac{n+1}{2}, m=\dfrac{n}{2}$ と置き換えて，

$a_n=\begin{cases} n & (n \text{ は奇数}) \\ n+2 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$ ，$a_n=\begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ は奇数}) \\ 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$ 　としました。

このような解答を求めるのは，私は避けた方が良いかなと思っています。数列 $\{a_n\}$ の奇数項が b_n，偶数項が c_n であるとき，$a_n = \dfrac{b_n + c_n}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{b_n - c_n}{2}$ で与えることができるのは有名です。偶奇ぐらいは場合分けしなくて良い訳なので，【問題９】なら数列 $\{a_n\}$ の一般項は？と聞かずに，a_{2m-1}, a_{2m} をそれぞれ聞くのが良いだろうと思います。配慮ある入試の出題は，$\{a_n\}$ の一般項を聞いていないように思いますが，一概にそうとも言えなかったりするので，入試問題の大学側が想定した正答や，採点の基準なんて実際のところはどんな参考書を読んでも分かることではないので，あの本にこうだったからという不毛な議論は不要で，生徒に教えるときにどこまで正確さを持って伝えるか，どこまで誤魔化しながらうまく伝えるかの塩梅を私たちが考えれば良いと思います。

【問題９】のそれぞれの一般項を場合分けせずに書いておくと，
(1) $a_n = \dfrac{n + (n+2)}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n - (n+2)}{2} = n + 1 + (-1)^n$
(2) $a_n = \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}} + 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}} - 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}}{2}$ となります。(2) の形は非常に見にくいので，整理すると $a_n = \dfrac{3+\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n + \dfrac{3-\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2})^n \cdots ②$ とできます。

(2) のほうが実際は簡単な例となっているので，先に話をしておくと，一般項 ② の形が $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ の形であるので，$t = \pm\sqrt{2}$ を解にもつ 2 次方程式 $t^2 - 2 = 0$ を特性方程式とする斉次な漸化式 $a_{n+2} - 2a_n = 0$ がもとにあるわけで，a_{n+1} の項がなく隣接していなくても，特性方程式は有用だと分かります。この問題に対して，特性方程式を取らずに偶奇での場合分けをするのは体系的な指導とならないように思います。

(1) の一般項 $a_n = (n+1) \cdot 1^{n-1} + (-1)^{n-1}$ は，$a_n = (An+B) \cdot \alpha^{n-1} + C \cdot \beta^{n-1}$ の形で，$t = \pm 1$ (1 が 2 重解) を解にもつ 3 次方程式 $(t-1)^2(t+1) = 0$ すなわち $t^3 - t^2 - t + 1 = 0$ を特性方程式とする斉次な漸化式 $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ がもとにありますが，【問題９】(2) の非斉次な漸化式 $a_{n+2} = a_n + 2$ を $a_{n+3} = a_{n+1} + 2$ とずらして引けば，4 項間漸化式 $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ が得られて，ここまでに確認した知識で解くことができます。何項間になっても斉次な漸化式にすれば，一般項の形が決まるわけなので，一般項が求まってしまうような数列は基本的に連立方程式を頑張れるかという一点に帰着されます。（高次方程式は解けるとして。）

以下で，大学入試問題を実際に解いてみようと思います。

【問題１０】※高知大学

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$，すべての自然数 m に対して， $a_{2m} = a_{2m-1} + 1$，$a_{2m+1} = 2a_{2m}$ を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

偶奇で異なる数列であることは問題からも明らかですが，数列 $\{a_n\}$ を書き並べておくと $1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, 23, \cdots$ となっています。数列 $\{a_n\}$ は何かしらの 5 項間漸化式を満たすはずで，特に偶数列のみ，奇数列のみの 3 項間漸化式を想定することが可能なので，確認します。

$a_{2m+4} = a_{2m+3} + 1 = 2a_{2m+2} + 1 = 2a_{2m+2} + a_{2m+2} - a_{2m+1} = 3a_{2m+2} - 2a_{2m}$
$a_{2m+3} = a_{2m+2} = 2(a_{2m+1} + 1) = 2a_{2m+1} + 2a_{2m} - 2a_{2m-1} = 3a_{2m+1} - 2a_{2m-1}$
をそれぞれ得ることができて，すなわち全ての自然数 n について，数列 $\{a_n\}$ は隣接しない 5 項間漸化式 $a_{n+4} = 3a_{n+2} - 2a_n$ を満たしています。隣接していなくても関係なく，特性方程式は $t^4 - 3t^2 - 2 = 0$ をおいて，解は $t = \pm 1, \pm\sqrt{2}$ を得ます。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = A \cdot (\sqrt{2})^{n-1} + B \cdot (-\sqrt{2})^{n-1} + C \cdot 1^{n-1} + D \cdot (-1)^{n-1}$ の形だと分かります。$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 5$ を求め，連立方程式を解き，$A = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}+1), B = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}-1), C = -\dfrac{3}{2}, D = -\dfrac{1}{2}$ を得て，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \dfrac{3}{4}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n - \dfrac{3}{4}(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2})^n - \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}$ となります。この解を出題側が想定しているでしょうか。同様の出題を自分自身がしてしまわないか，出題するならどのような立場かを明確にしておくべきだと思います。

【問題１１】※群馬大学 2007
数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_{100} = 148, n \geqq 2$ のとき
$a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2} = -(a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1})$ かつ $a_n \neq 0$ を満たしている。
数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

数列 $\{a_n\}$ を書き並べようとすると，$a_2a_5 - a_3a_4 = -(a_1a_4 - a_2a_3)$ と $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ より，$a_5 = a_4 - a_4 + 1 = 1$ で，以降 $a_6 = 2a_4 - 1, a_7 = 1, a_8 = 3a_4 - 2, a_9 = 1, \cdots$ と a_4 は分からないままですが，数列 $\{a_n\}$ の n の偶奇で異なる数列から構成されていると分かります。$a_4 = a$ として，$a_{2k} = (k-1)a - (k-2)$ ではないかと帰納法で確認していくことになるはずですが，$a_{2k} = (k-1)a - (k-2) = (a-1)k - a + 2$ は等差数列で n の 1 次式で書けること，数列 $\{a_n\}$ の奇数項が b_n，偶数項が c_n であるとき，$a_n = \dfrac{b_n + c_n}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{b_n - c_n}{2}$ で書けること，$b_n = 1$ に注意すると，$\dfrac{b_n + c_n}{2}$ も $\dfrac{b_n - c_n}{2}$ も n の 1 次式で書けることになります。
$a_n = (An+B) \cdot 1^{n-1} + (Cn+D)(-1)^{n-1}$ であるはずです。これは数列 $\{a_n\}$ が $t = \pm 1$(1,-1 ともに 2 重解) を解とする 4 次方程式 $(t+1)^2(t-1) = 0$ すなわち $t^4 - 2t^2 + 1 = 0$ を特性方程式とする漸化式 $a_{n+4} - 2a_{n+2} + a_n = 0$ を満たすはずで，目標が決まった変形を問題の漸化式に与えていくことになります。

$a_{n+1}a_{n+4}-a_{n+2}a_{n+3}=-(a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2})$ と

$a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=-(a_{n-1}a_{n+2}-a_na_{n+1})$ を引き算して，

$a_{n+4}a_{n+1}-a_{n+3}a_{n+2}=a_{n+2}a_{n-1}-a_{n+1}a_n$を得ます。両辺に $-2a_{n+2}a_{n+1}$を加えて，

$a_{n+4}a_{n+1}-2a_{n+2}a_{n+1}+a_na_{n+1}=a_{n+3}a_{n+2}-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n-1}a_{n+2}$とします。

$$\begin{aligned}a_{n+1}(a_{n+4}-2a_{n+2}+a_n)&=a_{n+2}(a_{n+3}-2a_{n+1}+a_{n-1})\\&=a_{n+3}(a_{n+2}-2a_n+a_{n-2})\\&=a_{n+4}(a_{n+1}-2a_{n-1}+a_{n-3})\\&=\cdots=a_{2n}(a_5-2a_3+a_1)=0\end{aligned}$$

$a\neq 0$ より $a_{n+4}-2a_{n+2}+a_n=0$ を得ることができました。

一般項の形 $a_n=(An+B)\cdot 1^{n-1}+(Cn+D)(-1)^{n-1}$ と a_4 の値がないので，$a_1=a_2=a_3=a_5=1$ を用いて，連立方程式を解こうとすると，問題発生となります。問題に与えられている条件 $a_{100}=148$ は $a_{2k}=(k-1)a-(k-2)$ 予想し，帰納法で示した後に $a=4$ を決まるための条件でしたが，ここでは連立方程式を解く初期条件として使います。連立方程式を解いて，$a_n=\dfrac{b_n+c_n}{2}+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{b_n-c_n}{2}$ で書けること，$\{b_n\}=1$ に注意すると，$A=\dfrac{3}{4}$，$B=-\dfrac{1}{2}$，$C=-\dfrac{3}{4}$，$D=\dfrac{3}{2}$ を得て，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{3n-2}{4}+3(\dfrac{n-2}{4})(-1)^n$ を得ることができます。予想し帰納法で示す以外にも，様々なアプローチがあることは，少なくとも教員側は知っていて損がないと思います。実際この問題は実験するまでもなくそもそも同次な 5 項間漸化式で，偶奇で異なることがすぐに分かってしまうはずです。

漸化式の一般項を求めること自体は，そもそも解ける漸化式なのですから，どんなに式を複雑にしても難しいものではありません。一般項から漸化式を復元できて，教員として一番便利なのは生徒に答えさせたい答えから，問題を作れることです。知っていて損はないと思います。

$a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ や $a_n=(2n-1)\cdot(-3)^{n-1}+(-n+3)\cdot 2^{n-1}$ が満たす 3 項間漸化式や 5 項間漸化式が求められるというのは，数学的な楽しみが増えるように思います。

一般項を偶奇で場合分けして答えさせたいような問題を出題するなら，4 項以上の漸化式が誘導なしでは解けないだろうから，解答欄で n についての場合分けがされていても○としてあげようと思って，出題するのが良いのではないでしょうか。

話が，いろいろ飛んでしまいましたが，最後に偶奇で異なる，つまり 1 個飛ばしになっている数列があるなら，2 個飛ばしはないだろうかということに触れておきます。

7　$n=3k, 3k-1, 3k-2$ での場合分け

【問題１２】※琉球大学 2020
i は虚数単位とする。
複素数 a_n を $a_1=-1, a_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n+\sqrt{3}i$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める。
また，複素数 b_n を $b_{n+1}=a_nb_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める。次の問いに答えよ。
(1)　a_2, a_3, a_4 を求めよ。
(2)　すべての自然数 n について，$a_{n+3}=a_n$ が成り立つことを示せ。
(3)　b_n を求めよ。

【問題１２】の解答には触れませんが，

(3) の想定解 $b_n=\begin{cases} 2^{\frac{n-1}{3}} & (n=3k-2) \\ -2^{\frac{n-2}{3}} & (n=3k-1) \\ -(1+\sqrt{3}i)2^{\frac{n}{3}-2} & (n=3k) \end{cases}$ も１本の式で書けるはずですが，より簡単のためにまず a_n の一般項を確認してみます。

$a_{n+3}=a_n$ の特性方程式 $t^3-1=0$ について，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると，特性方程式の解は，$t=1,\omega,\omega^2$ で，一般項は $a_n=A+B\omega^{n-1}+C(\omega^2)^{n-1}$ となります。$a_1=-1, a_2=-\omega^2, a_3=2\omega$ であるから $a_{n+3}=a_n$ で，連立方程式 $\begin{cases} a_1=A+B+C=-1 \\ a_2=A+B\omega+C\omega^2=-\omega^2 \\ a_3=A+B\omega^2+C\omega=2\omega \end{cases}$ から，$A=\omega, B=-(\omega+1), C=0$，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\omega-(\omega+1)(\omega)^{n-1}$ を得ることができます。（形はいろいろあると思いますが。）

$b_{n+3}=a_{n+2}b_{n+2}=a_{n+2}a_{n+1}b_{n+1}=a_{n+2}a_{n+1}a_nb_n=2b_n$ ($a_{n+2}a_{n+1}a_n=2$ は a_n が循環するので明らかです。) よって，$b_{n+3}=b_n$ の特性方程式 $t^3-2=0$ の解は，
$t=\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$ で，一般項は $a_n=A\cdot\sqrt[3]{2}+B\cdot(\sqrt[3]{2}\omega)^{n-1}+C\cdot(\sqrt[3]{2}\omega^2)^{n-1}$ となります。$b_1=1, b_2=1, b_3=\omega^2$ で連立方程式を解き，A,B,C を求め，$a=\sqrt[3]{2}$ とすると，
$b_n=\dfrac{(2-a^2+a\omega^2)}{6}a+\dfrac{(2\omega-a^2+a\omega)}{6}(a\omega)^{n-1}+\dfrac{(2\omega^2-a^2+a)}{6}(a\omega^2)^{n-1}$ を得ることができます。形として綺麗ではないかもしれませんが，2 個飛ばしの数列の１本の式で書けることが確認できました。

話が散らかってしまって本題が分からなくなりましたが，同次な斉次漸化式は解けて当たり前だと思えることは強みですし，一般項が求まるなら逆に良い漸化式が組むことができるのではないかと数列を見るような指導ができたら良いなと日々思っています。$a_{n+1}=f(n)\cdot a_n+g(n)$ のような漸化式についてもいつかまとめたいと思います。本稿にミスなどありましたらご指導いただきたく思います。