令和4年度 共通テスト (本試　令和4年1月16日実施)

数学I・数学A　(70分, 100点)

第1問　(必答問題)(配点 30)

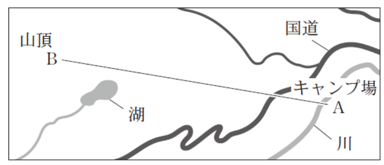
〔1〕実数 a, b, c が $a+b+c=1\cdots$①および $a^2+b^2+c^2=13\cdots$②を満たしているとする。

(1) $(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると $ab+bc+ca=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であることがわかる。よって $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。
$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=$ $\boxed{\text{オカ}}$ $\sqrt{5}$ である。また，(1) の計算から $x^2+y^2=$ $\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ。これらより $(a-b)(b-c)(c-a)=$ $\boxed{\text{ケ}}$ $\sqrt{5}$ である。

〔2〕以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて三角比の表を用いてもよい。(略)

太郎さんと花子さんはキャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

> 太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。
> 花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図1のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。
> 太郎：図1の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら 16° だったよ。
> 花子：本当に 16° なの？図1の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

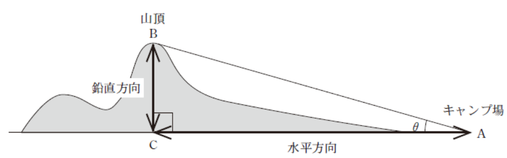


図　1

図1の θ はちょうど 16° であったとする。しかし，図1の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$ であるのに対して，鉛直方向は $\dfrac{1}{25000}$ であった。実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である $\angle\mathrm{BAC}$ を考えると，$\tan\angle\mathrm{BAC}$ は $\boxed{\text{コ}}$. $\boxed{\text{サシス}}$ となる。したがって，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさは $\boxed{\text{セ}}$ 。ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 3° より大きく 4° より小さい	① ちょうど 4° である
② 4° より大きく 5° より小さい	③ ちょうど 16° である
④ 48° より大きく 49° より小さい	⑤ ちょうど 49° である
⑥ 49° より大きく 50° より小さい	⑦ 63° より大きく 64° より小さい
⑧ ちょうど 64° である	⑨ 64° より大きく 65° より小さい

〔3〕外接円の半径が3である $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

(1) $\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{AC}=4$ とする。このとき，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$\mathrm{AD}=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(2) 2 辺 AB，AC の長さの間に $2\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=14$ の関係があるとする。このとき，AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ト}} \leqq \mathrm{AB} \leqq \boxed{\text{ナ}}$ であり $\mathrm{AD}=\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\mathrm{AB}^2+\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\mathrm{AB}$ と表せるので，AD の長さの最大値は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

第 2 問　(必答問題)(配点 30)

〔1〕p, q を実数とする。花子さんと太郎さんは，次の二つの 2 次方程式について考えている。

$x^2+px+q=0\cdots$①　　$x^2+qx+p=0\cdots$②

①または②を満たす実数 x の個数を n とおく。

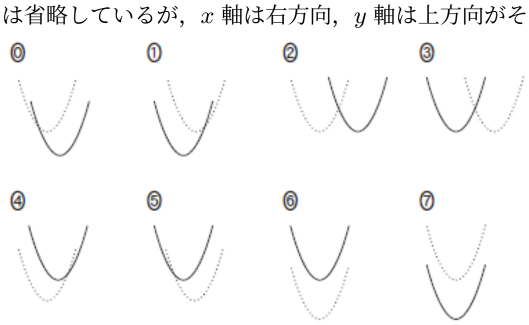
(1) $p=4$, $q=-4$ のとき，$n=\boxed{\text{ア}}$ である。また，$p=1$, $q=-2$ のとき，$n=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

> 花子：例えば，①と②をともに満たす実数 x があるときは $n=3$ になりそうだね。
> 太郎：それを α としたら，$\alpha^2-6\alpha+q=0$ と $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つよ。
> 花子：なるほど。それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね。
> 太郎：確かに α の値が求まるけど，実際に $n=3$ となっているかどうかの確認が必要だね。
> 花子：これ以外にも $n=3$ となる場合がありそうだね。

$n=3$ となる q の値は $q=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする。

(3) 花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①，②の左辺を y とおいた 2 次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている。$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。$y=x^2-6x+q\cdots$③，$y=x^2+qx-6\cdots$④の二つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q の値を 1 から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す。このとき，③のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{オ}}$ となり，④のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。



(4) $\boxed{\text{ウ}} < q < \boxed{\text{エ}}$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部分集合 A, B を $A=\{x \mid x^2-6x+q<0\}$，$B=\{x \mid x^2+qx-6<0\}$ とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成り立つ。

・$x\in A$ は，$x\in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$。

・$x\in B$ は，$x\in\overline{A}$ であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない	① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である	③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕日本国外における日本語教育の状況を調べるために，独立行政法人国際交流基金では「海外日本語教育機関調査」を実施しており，各国における教育機関数，教員数，学習者数が調べられている。2018 年度において学習者数が 5000 人以上の国と地域（以下，国）は 29 か国であった。これら 29 か国について，2009 年度と 2018 年度のデータが得られている。

(1) 各国において，学習者数を教員数で割ることにより，国ごとの「教員 1 人あたりの学習者数」を算出することができる。図 1 と図 2 は，2009 年度および 2018 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである。これらの二つのヒストグラムから，9 年間の変化に関して，後のことが読み取れる。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

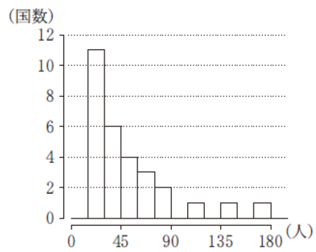


図 1　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

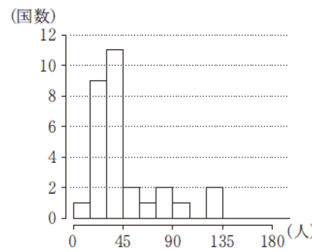


図 2　2018 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

・2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{ケ}$。

・2009 年度と 2018 年度の第 1 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{コ}$。

・2009 年度と 2018 年度の第 3 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{サ}$。

・2009 年度と 2018 年度のの範囲を比較すると，$\boxed{シ}$。

・2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると，$\boxed{ス}$。

$\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{ス}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 2018 年度の方が小さい	① 2018 年度の方が大きい
② 両者は等しい	③ これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない

(2) 各国において，学習者数を教育機関数で割ることにより，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」も算出した。図 3 は，2009 年度における「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の箱ひげ図である。2009 年度について，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」(横軸) と「教員 1 人あたりの学習者数」(縦軸) の散布図は $\boxed{セ}$ である。ここで，2009 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである (1) の図 1 を，図 4 として再掲しておく。

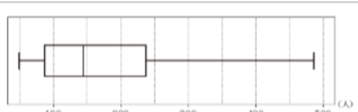


図 3　2009 年度における教育機関 1 機関あたりの学習者数の箱ひげ図

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

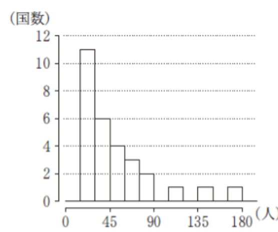
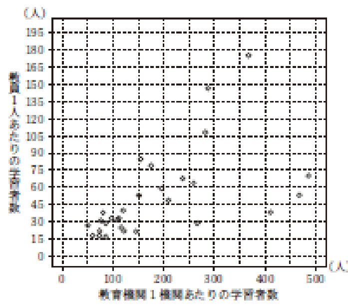


図 4　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

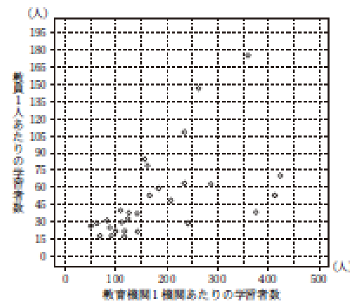
（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

セ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

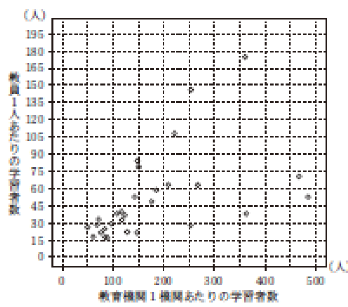
⓪



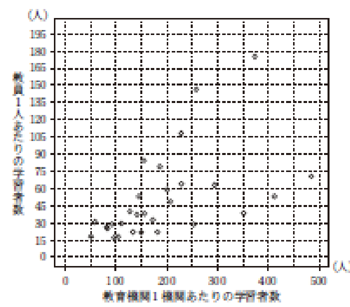
①



②



③



(3) 各国における 2018 年度の学習者数を 100 としたときの 2009 年度の学習者数 S，および，各国における 2018 年度の教員数を 100 としたときの 2009 年度の教員数 T を算出した。例えば，学習者数について説明すると，ある国において，2009 年度が 44272 人，2018 年度が 174521 人であった場合，2009 年度の学習者数 S は $\dfrac{44272}{174521} \times 100$ より 25.4 と算出される。

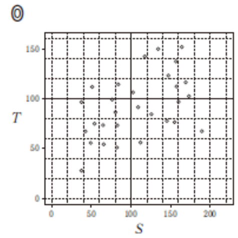
表 1 は S と T について，平均値，標準偏差および共分散を計算したものである。ただし，S と T の共分散は，S の偏差と T の偏差の積の平均値である。表 1 の数値が四捨五入していない正確な値であるとして，S と T の相関係数を求めると ソ . タチ である。

表 1　平均値，標準偏差および共分散

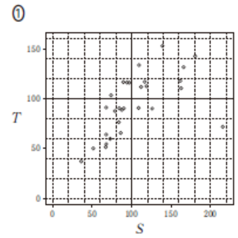
Sの平均値	Tの平均値	Sの標準偏差	Tの標準偏差	SとTの共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

(4) 表 1 と (3) で求めた相関係数を参考にすると，(3) で算出した 2009 年度の S(横軸) と T(縦軸) の散布図は ツ である。ツ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

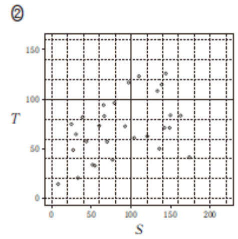
⓪



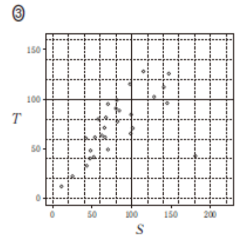
①



②



③



第3問 (選択問題) (配点 20)

複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の**手順**で行う。

手順

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果，1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

(1) 2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える。

(i) 2 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(ii) 3 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(2) 4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を次の**構想**に基づいて求めてみよう。

構想

1 回目の交換で交換会が**終了しない**プレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

1 回目の交換で，4 人のうち，ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{サ}}$ 通りあり，ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{シ}}$ 通りある。このように考えていくと，1 回目のプレゼントの受け取り方のうち，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{\text{スセ}}$ である。したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(3) 5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

(4) A，B，C，D，E の 5 人が交換会を開く。1 回目の交換で A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

(1) $5^4 = 625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると，不定方程式 $5^4x - 2^4y = 1 \cdots$ ①の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは $x = \boxed{\text{ア}}$，$y = \boxed{\text{イウ}}$ であることがわかる。また，①の整数解のうち，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは $x = \boxed{\text{エオ}}$，$y = \boxed{\text{カキク}}$ である。

(2) 次に，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう。まず $625^2 = 5^{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，また，$m = \boxed{\text{イウ}}$ とすると $625^2 = 2^{\boxed{\text{ケ}}}m^2 + 2^{\boxed{\text{コ}}}m + 1$ である。これらよ

り，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りがわかる。

(3) (2) の考察は，不定方程式 $5^5x-2^5y=1$…②の整数解を調べるために利用できる。x, y を②の整数解とする。5^5x は 5^5 の倍数であり，2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって，(2) により，5^5x-625^2 は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。5^5 と 2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot2^5$ の倍数である。このことから，②の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは $x=$ サシス, $y=$ セソタチツ であることがわかる。

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式 $11^5x-2^5y=1$ の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは $x=$ テト，$y=$ ナニヌネノ である。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

△ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P，直線 DF と辺 AC の交点を Q とする。

(1) 点 D は線分 AG の中点であるとする。このとき，△ABC の形状に関係なく $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。また，点 F の位置に関係なく $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\boxed{ウ}\times\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{カ}\times\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であるので，つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{ケ}$ となる。

エ, オ, キ, ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ BC	① BF	② CF	③ EF
④ FP	⑤ FQ	⑥ PQ	

(2) AB = 9, BC = 8, AC = 6 とし，(1) と同様に，点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで，4 点 B，C，Q，P が同一円周上にあるように点 F をとる。このとき，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\mathrm{AP}$ であるから $\mathrm{AP}=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ であり $\mathrm{CF}=\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}$ である。

(3) △ABC の形状や点 F の位置に関係なく，つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ となるのは，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ のときである。

数学II・数学B (60 分, 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕座標平面上に点 A$(-8,0)$ をとる。また，不等式 $x^2+y^2-4x-10y+4\leqq0$ の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は，中心が点 $(\boxed{ア},\boxed{イ})$，半径が ウ の円の エ である。

エ の解答群

⓪ 周	① 内部	② 外部
③ 周および内部	④ 周および外部	

以下，点 $(\boxed{ア},\boxed{イ})$ を Q とし，方程式 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ の表す図形

を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1) により，直線 $y=$ $\boxed{\text{オ}}$ は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。
太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話している。
点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

> 太郎：直線 ℓ の方程式は $y=k(x+8)$ と表すことができるから，これを
> 　　　$x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入することで接線を求められそうだね。
> 花子：x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。$y=k(x+8)$ を $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入すると，x についての 2 次方程式 $(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ が得られる。この方程式が $\boxed{\text{カ}}$ ときの k の値が接線の傾きとなる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 重解をもつ
① 異なる二つの実数解をもち，一つは 0 である
② 異なる二つの正の実数解をもつ
③ 正の実数解と負の実数解をもつ
④ 異なる二つの負の実数解をもつ
⑤ 異なる二つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，直線 $y=$ $\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きは $\tan$ $\boxed{\text{ケ}}$ と表すことができる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ θ	① 2θ	② $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
③ $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$	④ $(\theta+\pi)$	⑤ $(\theta-\pi)$
⑥ $\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$	⑦ $\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$	

(iv) 点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=$ $\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。このとき，(ii) または (iii) の考え方を用いることにより $k_0=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であることがわかる。直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $k>k_0$	① $k\geqq k_0$	② $k<k_0$
③ $k\leqq k_0$	④ $0<k<k_0$	⑤ $0\leqq k\leqq k_0$

〔2〕a，b は正の実数であり，$a\neq 1$，$b\neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。まず，$\log_3 9=$ $\boxed{\text{ス}}$，$\log_9 3=\dfrac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ である。この場合 $\log_3 9>\log_9 3$ が成り立つ。一方，$\log_{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\text{セ}}$ $=-\dfrac{3}{2}$，$\log_{\boxed{\text{セ}}}\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2}{3}$ である。この場合 $\log_{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\text{セ}}$ $<\log_{\boxed{\text{セ}}}\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

(2) ここで $\log_a b = t$ …①とおく。(1) の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。$\log_b a = \dfrac{1}{t}$ …②

①により，$\boxed{\text{ソ}}$ である。このことにより $\boxed{\text{タ}}$ が得られ，②が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $a^b = t$	① $a^t = b$	② $b^a = t$
③ $b^t = a$	④ $t^a = b$	⑤ $t^b = a$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $a = t^{\frac{1}{b}}$	① $a = b^{\frac{1}{t}}$	② $b = t^{\frac{1}{a}}$
③ $b = a^{\frac{1}{t}}$	④ $t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤ $t = a^{\frac{1}{b}}$

(3) 次に，太郎さんは (2) の考察をもとにして $t > \dfrac{1}{t}$ …③ を満たす実数 t $(t \neq 0)$ の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 > 1$ を得る。このような t $(t > 0)$ の値の範囲は $1 < t$ である。$t < 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 < 1$ を得る。このような t $(t < 0)$ の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により，③ を満たす t $(t \neq 0)$ の値の範囲は $-1 < t < 0$, $1 < t$ であることがわかる。ここで，a の値を一つ定めたとき，不等式 $\log_a b > \log_b a$ …④ を満たす実数 b $(b > 0, b \neq 1)$ の値の範囲について考える。④ を満たす b の値の範囲は，$a > 1$ のときは $\boxed{\text{チ}}$ であり，$0 < a < 1$ のときは $\boxed{\text{ツ}}$ である。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $0 < b < \dfrac{1}{a}$, $1 < b < a$	① $0 < b < \dfrac{1}{a}$, $a < b$
② $\dfrac{1}{a} < b < 1$, $1 < b < a$	③ $\dfrac{1}{a} < b < 1$, $a < b$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $0 < b < a$, $1 < b < \dfrac{1}{a}$	① $0 < b < a$, $\dfrac{1}{a} < b$
② $a < b < 1$, $1 < b < \dfrac{1}{a}$	③ $a < b < 1$, $\dfrac{1}{a} < b$

(4) $p = \dfrac{12}{13}$, $q = \dfrac{12}{11}$, $r = \dfrac{14}{13}$ とする。次の ⓪〜③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

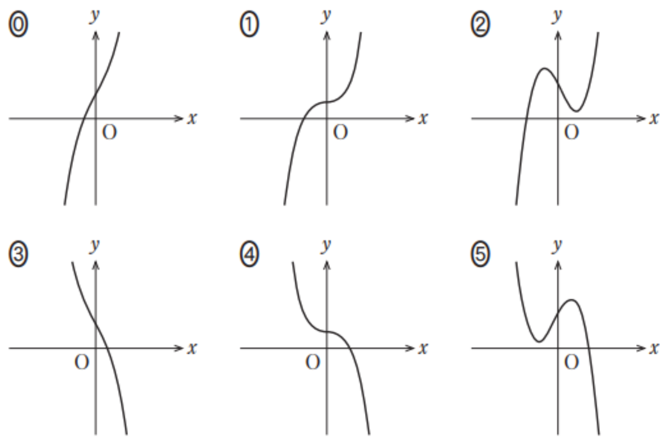
第 2 問 (必答問題)(配点 30)

〔1〕 a を実数とし，$f(x) = x^3 - 6ax + 16$ とおく。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形は $a = 0$ のとき $\boxed{\text{ア}}$ ，$a < 0$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑤ のうちから一つずつ選べ。

ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(2) $a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < p < \boxed{\text{エ}}$ である。$p=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を $q,\ r\ (q<r)$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することに注意すると

$q=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a^{\frac{1}{2}},\ r=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,a^{\frac{1}{2}}$ と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	① $-2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
② $4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	③ $-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
④ $8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	⑤ $-8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$

(3) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の ⓪〜⑤ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ の解答群 (解答の順序は問わない。)

⓪ $n=1$ ならば $a<0$	① $a<0$ ならば $n=1$
② $n=2$ ならば $a<0$	③ $a<0$ ならば $n=2$
④ $n=3$ ならば $a>0$	⑤ $a>0$ ならば $n=3$

〔2〕 $b>0$ とし，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y=g(x)$ を C_1，曲線 $y=h(x)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=\boxed{\text{サ}}$,$\beta=\boxed{\text{シス}}$ である。

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，$\beta \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S=\int_{\alpha}^{\beta}\boxed{\text{セ}}\,dx$，$T=\int_{\beta}^{t}\boxed{\text{ソ}}\,dx$，$S-T=\int_{\alpha}^{t}\boxed{\text{タ}}\,dx$ であるので，

$S-T=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}(2t^3-\boxed{\text{ト}}\,bt^2+\boxed{\text{ナニ}}\,b^2t-\boxed{\text{ヌ}}\,b^3)$ が得られる。したがって，

$S=T$ となるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}b$ のときである。

$\boxed{\text{セ}}$ 〜 $\boxed{\text{タ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\{g(x)+h(x)\}$	① $\{g(x)-h(x)\}$
② $\{h(x)-g(x)\}$	③ $\{2g(x)+2h(x)\}$
④ $\{2g(x)-2h(x)\}$	⑤ $\{2h(x)-2g(x)\}$
⑥ $2g(x)$	⑦ $2h(x)$

第３問　(選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表 (本誌割愛) を用いてもよい。

ジャガイモを栽培し販売している会社に勤務する花子さんは，A 地区と B 地区で収穫されるジャガイモについて調べることになった。

(1) A 地区で収穫されるジャガイモには１個の重さが 200g を超えるものが 25% 含まれることが経験的にわかっている。花子さんは A 地区で収穫されたジャガイモから 400 個を無作為に抽出し，重さを計測した。そのうち，重さが 200g を超えるジャガイモの個数を表す確率変数を Z とする。このとき Z は二項分布 $B\left(400,\ 0.\boxed{\text{アイ}}\right)$ に従うから，Z の平均 (期待値) は $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(2) Z を (1) の確率変数とし，A 地区で収穫されたジャガイモ 400 個からなる標本において，重さが 200g を超えていたジャガイモの標本における比率を $R=\dfrac{Z}{400}$ とする。このとき，R の標準偏差は $\sigma(R)=\boxed{\text{カ}}$ である。標本の大きさ 400 は十分に大きいので，R は近似的に正規分布 $N\left(0.\boxed{\text{アイ}},\ \left(\boxed{\text{カ}}\right)^2\right)$ に従う。したがって，$P(R \geqq x)=0.0465$ となるような x の値は $\boxed{\text{キ}}$ となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ の計算においては $\sqrt{3}=1.73$ とする。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{3}{6400}$	① $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	② $\dfrac{\sqrt{3}}{80}$	③ $\dfrac{3}{40}$

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.209	① 0.251	② 0.286	③ 0.395

(3) B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ１個の重さは 100g から 300g の間に分布している。B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ１個の重さを表す確率変数を X とするとき，X は連続型確率変数であり，X のとり得る値 x の範囲は $100 \leqq x \leqq 300$ である。花子さんは，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものの割合を見積もりたいと考えた。そのために花子さんは，X の確率密度関数 $f(x)$ として適当な関数を定め，それを用いて割合を見積もるという方針を立てた。B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモから 206 個を無作為に抽出したところ，重さの標本平均は 180g であった。図１はこの標本のヒストグラムである。

花子さんは図１のヒストグラムにおいて，重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し，X の確率密度関数 $f(x)$ として，１次関数 $f(x)=ax+b\ (100 \leqq x \leqq 300)$ を考えることにした。ただし，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ とする。このとき，$P(100 \leqq x \leqq 300)=\boxed{\text{ク}}$ であることから

$\boxed{\text{ケ}}\cdot 10^4 a+\boxed{\text{コ}}\cdot 10^2 b=\boxed{\text{ク}}$ …①

である。

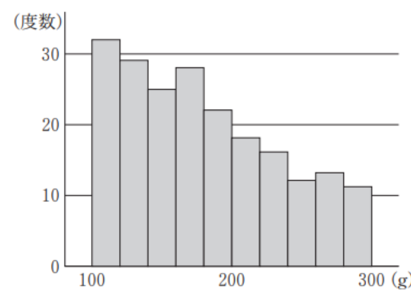


図１　ジャガイモの重さのヒストグラム

花子さんは図１のヒストグラムにおいて，重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し，X の確率密度関数 $f(x)$ として，１次関数 $f(x)=ax+b\ (100 \leqq x \leqq 300)$

を考えることにした。ただし，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ とする。このとき，$P(100 \leqq x \leqq 300) =$ $\boxed{\text{ク}}$ であることから $\boxed{\text{ケ}} \cdot 10^4 a +$ $\boxed{\text{コ}} \cdot 10^2 b =$ $\boxed{\text{ク}}$ …① である。
花子さんは，X の平均 (期待値) が重さの標本平均 180g と等しくなるように確率密度関数を定める方法を用いることにした。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $100 \leqq x \leqq 300$ で，その確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 (期待値)m は $m = \int_{100}^{300} x f(x)\,dx$ で定義される。この定義と花子さんの採用した方法から $m = \frac{26}{3} \cdot 10^6 a + 4 \cdot 10^4 b = 180$ …② となる。① と ② により，確率密度関数は $f(x) = -$ $\boxed{\text{サ}} \cdot 10^{-5} x +$ $\boxed{\text{シス}} \cdot 10^{-3}$ …③ と得られる。このようにして得られた ③ の $f(x)$ は，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ を満たしており，確かに確率密度関数として適当である。したがって，この花子さんの方針に基づくと，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものは $\boxed{\text{セ}}$ % あると見積もることができる。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜③ のうちから一つ選べ。

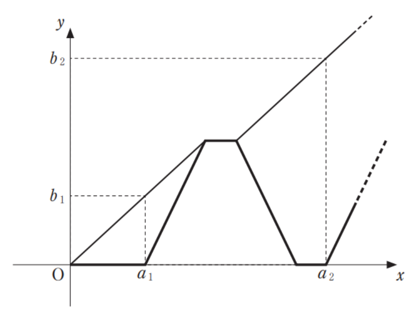
⓪ 33	① 34	② 35	③ 36

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

以下のように，歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて，数学的に考えてみよう。自宅を原点とする数直線を考え，歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき，その点は位置 y にあるということにする。また，歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点を時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し，正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し，毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと，歩行者と自転車はともに 1 分だけ停止する。その後，歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し，自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると，1 分だけ停止した後，再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し，自転車は自宅と歩行者の間を往復する。$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし，$y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

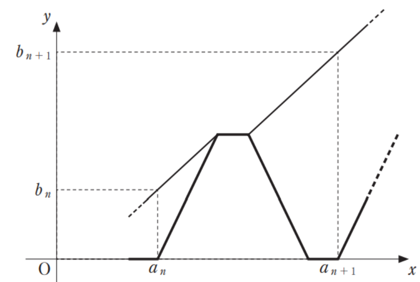
(1) 花子さんと太郎さんは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めるために，歩行者と自転車について，時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 $(x,\ y)$ で表すことにした。

$a_1 = 2$，$b_1 = 2$ により，自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は (2, 0) であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は (2, 2) である。また，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}}\right)$ である。よって $a_2 =$ $\boxed{\text{イ}}$，$b_2 =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。



花子：数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項について考える前に，$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}}\right)$ の求め方について整理してみようか。
太郎：花子さんはどうやって求めたの？
花子：自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が 1 分間に 1 ずつ縮まっていくことを利用したよ。
太郎：歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して，交点を計算して求めることもできるね。

自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n,\ 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(a_n,\ b_n)$ である。よって，n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は，$a_n,\ b_n$ を用いて，$\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ と表せる。



$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ a_n	① b_n	② $2a_n$
③ $a_n + b_n$	④ $2b_n$	⑤ $3a_n$
⑥ $2a_n + b_n$	⑦ $a_n + 2b_n$	⑧ $3b_n$

以上から，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，自然数 n に対して，

関係式 $a_{n+1} = a_n + \boxed{\text{カ}}\ b_n + \boxed{\text{キ}}$ …①，$b_{n+1} = 3b_n + \boxed{\text{ク}}$ …② が成り立つことがわかる。まず，$b_1 = 2$ と ② から $b_n = \boxed{\text{ケ}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を得る。この結果と，$a_1 = 2$ および ① から $a_n = \boxed{\text{コ}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がわかる。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $3^{n-1} + 1$	① $\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}$
② $3^{n-1} + n$	③ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n - \frac{1}{2}$
④ $3^{n-1} + n^2$	⑤ $\frac{1}{2} \cdot 3^n + n^2 - \frac{1}{2}$
⑥ $2 \cdot 3^{n-1}$	⑦ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$
⑧ $2 \cdot 3^{n-1} + n - 1$	⑨ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}$
ⓐ $2 \cdot 3^{n-1} + n^2 - 1$	ⓑ $\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n^2 - \frac{3}{2}$

(2) 歩行者が $y = 300$ の位置に到着するときまでに，自転車が歩行者に追いつく回数は $\boxed{\text{サ}}$ 回である。また，$\boxed{\text{サ}}$ 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は，$x = \boxed{\text{シスセ}}$ である。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。また，直線 OP 上に点 Q をとる。

(1) $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せる。したがって

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ …①，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \boxed{\text{カ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{キ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直となるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ kt	① $(k - kt)$	② $(kt + 1)$
③ $(kt - 1)$	④ $(k - kt + 1)$	⑤ $(k - kt - 1)$

以下，$t \fallingdotseq \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とし，∠OCQ が直角であるとする。

(2) ∠OCQ が直角であることにより，(1) の k は $k = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\,t - \boxed{\text{シ}}}$ …② となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

$0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$。$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
① D_1 に含まれ，かつ E_2 に含まれる
② D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
③ D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の関係について考えている。$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，① と ② により，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる。

太郎：$t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ のときにも，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな。
花子：$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ を t を用いて表して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。
太郎：計算が大変そうだね。
花子：直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ。
太郎：$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \boxed{\text{チ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{ツ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。$t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。