中学生でもわかる中心極限定理

東葛飾中学校・高等学校　齋野大

東葛飾中学校・高等学校は併設型の中高一貫校であり，東葛飾中学校（以下，本校）を卒業した生徒は，全員東葛飾高校へ進学する。そのため，本校の生徒はいわゆる受験勉強をする必要がなく，比較的自由に興味があることをやりながら，３年間を過ごすことができる。そのような本校においては，中学校における数学の学習内容を一通り終えた後は，既習事項の深化と高校以降の数学の学習への見通しをもたせることをねらいとし，発展的内容を扱うことが多い。

ここではその１つとして，卒業を間近に控えた中学３年生を対象に，１月から３月にかけて十数回行った統計学の基本的な内容に関する授業実践の報告を行う。この単元の最終的な目標は，タイトルにあるとおり，中心極限定理を理解させることである。この単元においては，数学的な厳密さだけにこだわらず，実験を取り入れ具体例をあげることで，理解度を高めた。また，中学生に統計学を指導するに当たり，できるだけ確率分布・確率変数という言葉を用いずに授業を展開した。以下では，実際にどのように授業を進めたのか，具体的に扱った例題・実験を紹介しながら説明する。

1　平均値，分散，標準偏差

平均値は，小学生から最も馴染みのある統計量であるが，分散，標準偏差という統計量は，ここで初めて学習する生徒がほとんどである。まず，分散，標準偏差という値に慣れてもらうため，身近でイメージしやすい漫才コンテストの審査結果やテストの得点などを題材とした。最初に扱ったのは，次の例題である。

例題１

次の表は，ある漫才コンテストで５組のコンビの各漫才を３人の審査員が 100 点満点で評価した結果である。審査員 A，B，C の平均値，分散，標準偏差をそれぞれ求めなさい。

	コンビ１	コンビ２	コンビ３	コンビ４	コンビ５
審査員 A	84	89	85	92	90
審査員 B	82	85	90	93	85
審査員 C	89	91	90	96	89

A，B，C の３人が評価した結果（点数）の分散・標準偏差が大きいほど，結果（点数）の散らばり度合いが大きいことが分かれば十分である。

また，この時間では偏差値も題材として扱った。扱ったのは，次の例題である。

例題 2

ある定期テストの数学と英語の平均値，標準偏差は以下のとおりだった。A さんの数学のテスト結果は 78 点，B さんの英語のテスト結果は 74 点であるとき，A さんの数学の結果と B さんの英語の結果では，どちらが優れているか。

教科	平均値	標準偏差
数学	58	17
英語	54	11

本校の生徒は，中学受験を経験し入学してくるため偏差値という言葉は知っているものの，その定義まで理解している生徒はほとんどいない。言うまでもないが，例題 2 では A も B も（平均値＋ 20）点をとっているため，平均値との差だけで優劣をつけることはできない。そこで，優劣をつける 1 つの指標として

$$\text{偏差値} = \frac{x-\mu}{\sigma} \times 10 + 50 \qquad (\mu\text{は平均値}, \sigma\text{は標準偏差})$$

を紹介した。

2　平均値，分散，標準偏差の値の変化

次に，データを 1 次変換（一律に定数を加える，一律に定数倍する）することで，平均値，分散，標準偏差はそれぞれどのように変化するか調べさせた。

例題 3

下のデータは，中学生 5 人が受けた漢字の小テストの結果である。

14,11,16,9,15（点）

(1) 平均値，分散，標準偏差を求めなさい。

(2) 5 人に一律に 3 点を加えることにした。このとき，平均値，分散，標準偏差を求めなさい。

(3) 5 人の点数を一律に 2 倍することにした。このとき，平均値，分散，標準偏差を求めなさい。

文字式の計算練習も兼ねて，例題 3 を以下のように一般化した例題を扱った。

例題 4

n 個のデータ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ の平均値が μ, 分散が σ^2，標準偏差が σ のとき，次の (1), (2) の各場合について，平均値 μ，分散 σ^2，標準偏差 σ はどのように変化するか調べよ。

(1) n 個のデータに一律に a を加えた場合

(2) n 個のデータを一律に b 倍した場合

また，ここまでの理解を確認する問題として，次の例題を扱った。

例題 5

5 つのデータ

$$14, 11, 16, 9, 15$$

の平均値を 0，分散を 1^2 にするには，5 つのデータに対してどのような変換を行えばよいか。

この変換はいわゆる“標準化”と呼ばれる変換である。偏差値の定義式に現れた $(x-\mu)/\sigma$ の部分がまさにデータの標準化であり，偏差値の定義式において本質的な部分である。

3　度数分布表とヒストグラム

次に，あるデータを 1 次変換した場合の平均値，分散の変化と，ヒストグラムの変化を対応づけてイメージできるようになることを目標として，次の例題を扱った。

例題 6

下のデータは，中学生 20 人が受けた理科の小テストの結果である。なお，このデータの平均値は 34.45，分散はおよそ 69.7 である。

39,26,27,23,35,36,39,25,46,22,38,41,42,32,33,18,43,47,44,33（点）

(1) 度数分布表を作りなさい。
(2) ヒストグラムを作りなさい。
(3) 全員の結果に一律に 3 点を加えることにした。このとき，平均値，分散・標準偏差を求めなさい。また，そのデータのヒストグラムをかきなさい。
(4) 全員の結果を一律に 2 倍することにした。このとき，平均値，分散・標準偏差を求めなさい。また，そのデータのヒストグラムをかきなさい。

(1) の度数分布表の階級は，15 点から区切り始めとし，階級の幅を 5 点とした。(3)，(4) では，もとのデータに対して一律に 3 を加えたり，2 倍したデータから度数分布表を作りヒストグラムを作る，ということが目的ではない。データの変化から，ヒストグラムがどのように変化するのか，イメージができるようになってほしいと考え，扱った例題である。

また，度数分布表から平均値，分散を求める方法もここで確認させた。

例題 7

例題 6 の (1) の度数分布表のみが与えられた場合，そこからもとの 20 個のデータの平均値，分散を求めなさい（復元しなさい）。

平均値，分散はそれぞれ (階級値 $\times$ 相対度数) の合計，((階級値 $-$ 平均値)^2 $\times$ 相対度数) の合計 として求められるが，これは確率変数の平均値，分散の定義と本質的に同じである。例題 7 をここで扱うことで，後で扱う二項分布，ベルヌーイ分布の平均値，分散の定義が比較的自然に理解できる。

4　紙テープを 10cm に切る実験と分布曲線

まず，生徒一人一人に 100cm 強の紙テープを渡し，その紙テープから目測で 10cm ずつ，計 10 本の紙テープを切り取らせた。切り取った紙テープは 1 本ずつ長さを測定させ，74 人の生徒から計 738 個のデータが集まった。図 1，図 2 はそのヒストグラムである。図 2 は図 1 より階級の幅を狭くして描いたヒストグラムである。ただし，どちらのヒストグラムにおいても各階級値の上の長方形の面積が，その階級の相対度数を表していることに注意していただきたい。つまり，縦軸は 相対度数/階級の幅 となるように目盛りをとってある。図 1 の縦軸の目盛りの数値より，図 2 の目盛りの数値が大きいものが存在するのはそのためである。また，どちらのヒストグラムにおいても長方形の面積の総和は 1 である。

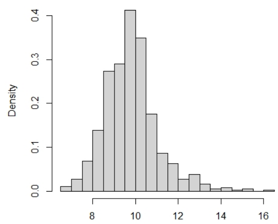

図 1　階級の幅 0.5

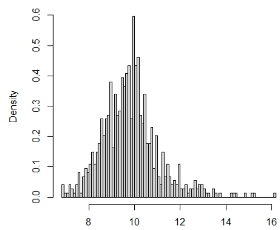

図 2　階級の幅 0.2

縦軸の目盛りをそのようにとれば，そのときのヒストグラムは実験回数を限りなく増やすとき，一定のヒストグラムに近づくことが期待できる。さらに，紙テープの長さはいくらでも精密に測定することができて，それに応じて階級の幅をいくらでも小さくすることができると仮定すると，ヒストグラムの形は次第に 1 つの連続な曲線に近づくことが期待できる。このような曲線を分布曲線という。長さや重さなど測定値が連続量である場合，分布曲線のもとでは横軸の任意な 2 つの値が決める区間に挟まれた部分の面積が，データがその区間にあると期待される相対度数に等しくなければならない。

最も有名で重要な分布曲線として，正規分布曲線を紹介した。正規分布の特徴として抑えたものは，以下の 2 つである。

(1) 平均値 μ に関して左右対称
(2) $\mu \pm \sigma$ の範囲の中に約 68.3 %のデータがある。$\mu \pm 2\sigma$ の範囲の中に約 95.4 %のデータがある。$\mu \pm 3\sigma$ の範囲の中に約 99.7 %のデータがある。（σ は標準偏差）

紙テープを 10cm に切る実験から得られたデータが，正規分布に従っているかどうか定かではない。しかし，工業製品の測定値などは，正規分布として現れることがよく知られている。そのことを踏まえれば，今回の紙テープを 10cm に切って得られたデータの分布が正規分布であると考えることは，あながち間違いではないのではないだろうか。

5　標準正規分布

自然現象や社会現象の中には，観測される変量 x の分布が正規分布に近いものがあり，このとき正規分布が有効に利用される。

変量 x の分布が，平均値 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うとき，変量 x に対して，

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

とすると，z は平均値 0，分散 1^2 の正規分布に従う（例題 5 や例題 6 が布石になっている）。平均値 0，分散 1^2 の正規分布 $N(0,1^2)$ を標準正規分布という。

次の例題は，標準正規分布表を利用することに慣れてもらうために用意した。

例題 8

ある県の 17 歳男子の身長は，平均値 171.3cm，標準偏差 5.4cm の正規分布に従う。

(1) この県の 17 歳男子で，身長が 180cm 以上の人は約何％か。
(2) 身長が 165.9cm から 176.7cm までの人が 4000 人いた。この県の 17 歳男子の総人口は約何人か。

6　二項分布

次に二項分布を紹介した。ここまで，できる限り確率や確率分布という言葉を用いずに話を進めてきたが，二項分布の説明では確率という言葉を用いざるを得ない。二項分布の理解は，正規分布の理解に欠かせないものであろう。

例題 9

1 枚のコインを 3 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X が 0,1,2,3 の各値をとるときの確率をそれぞれ求め，表にしなさい。

X	0	1	2	3	計
確率					1

この例題の後，二項分布の定義を確認し，二項分布 $B(n,p)$ の平均値は np，分散は $np(1-p)$ となることを公式として紹介した。平均値が np となることは直感的にも理解しやすいが，分散はそうもいかない。中学生で一般化された二項分布の分散を求めることは容易でないが，以下の例題 10 に取り組ませることで，一応の納得感をもたせたつもりである。二項分布における分散の公式は，その導出にこだわらなくとも使えれば十分である。

例題 10

(1) 例題 9 の平均値と分散を，公式を用いて求めなさい。
(2) 例題 9 の平均値と分散を，公式を用いずに求めなさい（例題 7 の度数分布表から平均値と分散を求めた方法を真似しなさい）。

7　二項分布と正規分布

二項分布 $B(n,p)$ で，n や p の値を変えるとヒストグラムはどのように変化するのか。

図 3，4 を見てわかるように，n を次第に大きくすると二項分布 $B(n,p)$ は正規分布に近づく。

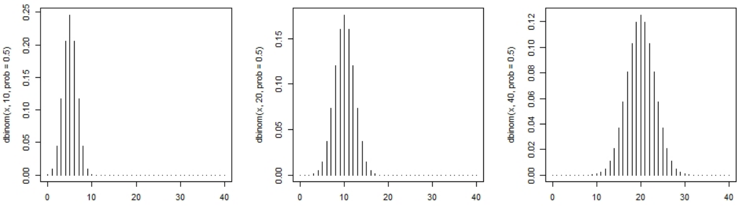

図 3　二項分布 $B(n, 0.5)$ の $n = 10, 20, 40$ のそれぞれの分布

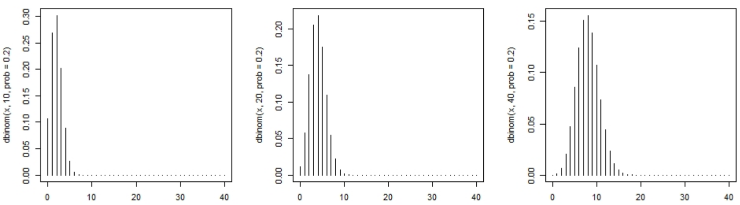

図 4　二項分布 $B(n, 0.2)$ の $n = 10, 20, 40$ のそれぞれの分布

それぞれの場合で分散を計算してみると，データの散らばり度合いと分散の大きさについての対応が確認できる。ここで，分散はデータの散らばり度合いを表す指標であることを再確認させた。

実用上は，$np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ であれば，二項分布 $B(n, p)$ を正規分布 $N(np, np(1-p))$ として扱うことは差し支えないとされているようである。

次の例題は，二項分布を正規分布として扱うことで解決できる問題の 1 つである。

例題 11

日本人で血液型が A 型である人の割合は 40 %である。1200 人の日本人を集めたとき，血液型が A 型である人が 450 人以上 500 人以下である確率を求めなさい。

8　標本平均と区間推定

あまり現実的ではないが，1 個のデータから信頼度 95 %の信頼区間の求め方を説明した。扱ったのは以下の例題である。

例題 12

精度のあまり良くない温度計で液体の温度を測る。計測されるデータは実際の温度 μ（°C）を平均値とし，分散 25 の正規分布に従うものとする。今計測された温度は 20°C であった。実際の温度 μ は何 °C くらいであったと考えるのが妥当か。

初学者にとって，得られる信頼度 95 %の信頼区間

$$10.2 \leq \mu \leq 29.8$$

が何を意味しているのか，正しく理解するのは難しい。例題 12 のような簡単な例で，信頼区間の意味を正しく理解させたい。

もちろん，実際の場面では 1 個のデータから信頼区間を求めることはまずない。そこで重要になるのは，標本平均と標本分散に関する次の事実である。中学生では，この事実は証明できないが，結果だけ利用できれば十分である。

母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布に従う母集団から，サイズ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{x}$ は，平均値 μ，分散 σ^2/n の正規分布に従う。

この事実を利用する問題として，次の例題を扱った。

例題 13

ある集団の身長は，平均値 μ (cm)，分散 36 の正規分布に従うとする。この集団から無作為に 5 人抽出すると，その身長が以下のとおりだった。信頼度 95 %で μ を推定せよ。

160,162,157,168,163

9　BB 弾サンプリング実験

フリーザーパックに 400 個の BB 弾を入れたものと紙皿を用意する。400 個の BB 弾のうち，白弾は 250 個，緑弾は 150 個である。この BB 弾が入ったフリーザーパックを生徒 2 人につき 1 つずつ渡し，サンプリング実験を行わせた。実験の手順は以下のとおりである。

(1) フリーザーパックの中をよくかき混ぜ，中を覗き込まずに指定された個数分，BB 弾を紙皿に取り出す（授業当時は，ペアごとに取り出す数を，10 個，20 個，50 個と指定した）。
(2) 多く取り出した場合は，目を閉じて余分な数の BB 弾を紙皿からフリーザーパックに戻す（少なかった場合は，目を閉じて不足分をフリーザーパックから紙皿に取り出す）。
(3) 取り出した BB 弾のうち，緑色の弾の数を記録し，すべての弾をフリーザーパックに戻す。
(4) (1) から (3) 繰り返す。

授業中の実験だけでは十分な数のデータを得ることができなかったが，放課後に実験の続きに協力してくれた生徒がいたおかげて，10 個取り出す実験，20 個取り出す実験，50 個取り出す実験はそれぞれ 618 回，605 回，597 回行うことができた。図 5，図 6，図 7 はそのヒストグラムである（縦軸は度数）。

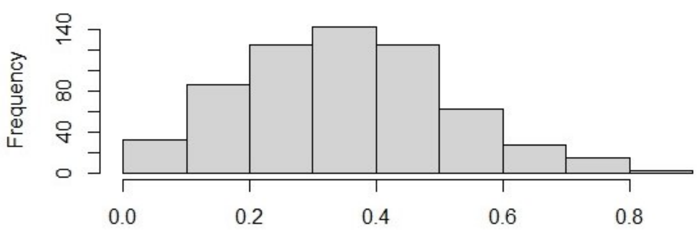

図 5　取り出した 10 個の弾における緑色の弾の割合のヒストグラム

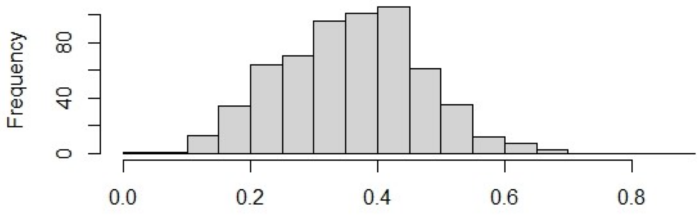

図 6　取り出した 20 個の弾における緑色の弾の割合のヒストグラム

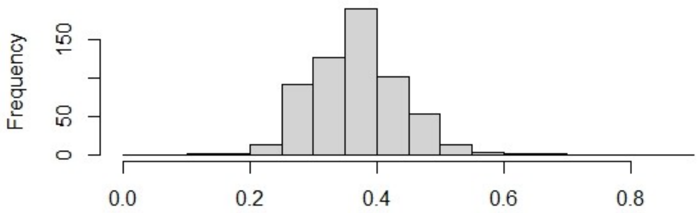

図 7　取り出した 50 個の弾における緑色の弾の割合のヒストグラム

いずれのヒストグラムにおいてもその中央は，母平均 $150/400 = 0.375$ 付近にあることが読み取れる。また，BB 弾を取り出す数が大きい実験のヒストグラムほど，その形は正規分布に近づく。この結果は，中心極限定理によるものである。

10　中心極限定理

この単元の学習の最後として，中心極限定理を紹介した。

母集団（BB 弾 400 個）の各要素（BB 弾の弾 1 つ 1 つ）の色は緑か白のいずれかで，弾の色が緑のときは 1，白のときは 0 を対応させる。このときの母集団分布は，以下のようになる。

値	1	0	計
確率（相対度数）	0.375	0.625	1

この分布を一般化して平均値と分散を求めさせる。ここでも例題 7 の度数分布表から平均値と分散を求めた方法が真似できる。

例題 14

(1) 母集団の分布が以下のようになっているとき，平均値（母平均）と分散（母分散）を求めなさい。

値	1	0	計
確率（相対度数）	p	q	1

ただし，$q = 1 - p$

(2) (1) の結果を用いて，BB 弾のサンプル実験における母集団の平均値と分散を求めなさい。

例題 14 のような分布をベルヌーイ分布という。ちなみに，この実験において，標本サイズが 10，20，50 である 618 個，605 個，597 個のデータの分散は，それぞれおよそ 0.027507，0.012303，0.004848 であった。これらは母分散 $0.375 \times 0.625 = 0.234375$ に対して，それぞれおよそ 1/10， 1/20， 1/50 になっていることを確認させた。

BB 弾の実験で，抽出した標本の標本サイズを n とする。この標本の各要素を表す値を $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ とすると，これらはそれぞれ 1 または 0 である。各標本における緑色の弾の数の比率 R は，$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ のうち，値が 1 であるものの割合なので

$$R = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

これは標本平均 $\overline{x}$ に他ならない。ここで，ようやく中心極限定理を紹介することができる。

中心極限定理

母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団からサイズ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{x}$ の分布は n が十分大きいとき，近似的に平均値 μ，分散 σ^2/n の正規分布に従う。

中心極限定理の不思議さは，母集団の分布が正規分布でなくとも，標本平均の分布が正規分布になることにある。中心極限定理の存在こそ，正規分布が統計学で最も重要な分布と言われるゆえんである。

中心極限定理をふまえると，以下のように母平均 (母比率)p を未知として，p の信頼度 95 %の信頼区間を求めることができる。

標本サイズを n とすると，n が十分大きいとき，標本平均 $\overline{x}$ の分布は中心極限定理により，平均値 p，分散 $p(1-p)/n$ の正規分布に従う。

このとき，標本平均 R について，区間

$$p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq R \leq p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

が母平均 (母比率)p を含むことが 95 %の確からしさで期待できる。上の式を変形すると

$$R - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq R + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

n が十分大きいとき，R は p に近いとみなせるから（大数の法則），$\sqrt{}$ の中の p を R で置き換えると

$$R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq p \leq R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

この区間を，母比率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間という。次の例題では，BB 弾のサンプリング実験で得られた実際のデータから信頼区間を求めさせた。

例題 15

(1) BB 弾の実験で，無作為に 50 個抽出すると，そのうち緑色の弾は 20 個であった。母集団に対する緑色の弾の比率（母比率）を信頼度 95 %で推定せよ。
(2) BB 弾の実験で，無作為に 50 個抽出すると，そのうち緑色の弾は 30 個であった。母集団に対する緑色の弾の比率（母比率）を信頼度 95 %で推定せよ。

(1) から得られる 95 %信頼区間 $0.263 \leq p \leq 0.537$ には母平均 0.375 を含むが，(2) から得られる 95 %信頼区間 $0.463 \leq p \leq 0.737$ には母平均 0.375 を含まない。このことから，一般的にサンプリング調査をする際は，できるだけ特別なものに偏らないように選ぶことが重要であることが実感できる。

次の例題は，ここまでの理解を確認する問題として扱った。

例題 16

ある市の有権者 2500 人を無作為に抽出し，内閣の支持者を調べたところ，625 人であった。この市の内閣支持率を信頼度 95 %で推定しなさい。

11 標本サイズは大きいほどいいのか

母比率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間は

$$R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq p \leq R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

であった。この区間の幅は

$$\begin{aligned}\left(R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) - \left(R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right) \\ = 2 \times 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \\ = \frac{2 \times 1.96}{\sqrt{n}} \times \sqrt{R(1-R)}\end{aligned}$$

$\sqrt{R(1-R)}$ は，$R = 0.5$ で最大値 0.5 をとることが分かるので

$$\frac{2 \times 1.96}{\sqrt{n}} \times \sqrt{R(1-R)} \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

$\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$ の値を n を変化させて具体的に求めてみると

$n = 10$ のとき，約 0.62
$n = 50$ のとき，約 0.28
$n = 100$ のとき，約 0.2
$n = 500$ のとき，約 0.09
$n = 1000$ のとき，約 0.06
$n = 2000$ のとき，約 0.04
$n = 5000$ のとき，約 0.03

$n=10000$ のとき，約 0.02

n を大きくすると信頼区間の幅は減少するが，減少する割合は次第に小さくなる。実際の内閣支持率調査などでは，調査にかかる人件費や時間などの点から標本サイズ（有効回答者数）はおよそ 1000 とすることが多いようである。

$n=1000$ のとき，$\dfrac{1.96}{\sqrt{n}} \simeq 0.06$ であるが，これは 1000 人ほどの人から得られた回答をもとに母比率 p の 95 %信頼区間を求めた場合，その区間は区間の中央からのずれが最大で $\pm 3\%$ ポイントであるような区間である，ということを意味する。$\pm 3\%$ ポイントの誤差は以外に大きいと感じるのは私だけだろうか。

12　まとめ

未来が予測できたり, 一部から全体が予測できたりする。これこそ，統計学の魅力の 1 つであり，エキサイティングな部分であろう。しかし，統計学の比較的初歩で登場する確率分布や確率変数の考え方が，そういった魅力を実感できるまでの低くないハードルになっているのではないだろうか。

そこで，今回は最も基本的な統計量である平均値から復習しつつも，確率分布や確率変数という言葉は用いずに上で述べた統計学の魅力を最短・最速で感じられるように，授業を展開した。また，生徒自らが手を動かすことで得た実験データを用いて分布曲線や中心極限定理などを紹介したことで，生徒は難しい内容でも興味深く学習に取り組んでいたように思う。

私自身，このような統計学の授業をすることは初めてのことで，授業を行う前には様々な不安もあった。しかし，授業を進めるうちに自分自身が統計学の面白さを実感していく感覚があり，非常に楽しく授業をすることができた。このことは，改めてお伝えしたい。

この実践例が，高校生に対して統計学に関する内容を指導する際の先生方の参考となれば幸いである。

解答

例題 1 平均値，分散，標準偏差の順に　審査員 A : 88，9.2，3.0　審査員 B : 87，15.6，3.9　審査員 C : 91，6.8，2.6

例題 2 A の偏差値 61.8，B の偏差値 68.2　よって B のほうが優れている

例題 3 平均値，分散，標準偏差の順に (1)13，6.8，2.6　(2)16，6.8，2.6　(3)26，27.2，5.2

例題 4 平均値，分散，標準偏差の順に (1)$\mu+a$，σ^2，σ　(2)$b\mu$，$b^2\sigma^2$，$|b|\sigma$

例題 5 5 つのデータから一律に 13 を引き，さらに一律に 6.8 で割る

例題 6 (1) 略 (2) 略　(3) 平均値 37.45，分散 69.7，標準偏差 8.4　(4) 平均値 68.9，分散，278.8，標準偏差 16.7

例題 7 略

例題 8 (1)5.5 %　(2)5860 人

例題 9 略

例題 10 (1)，(2) 平均値 3/2，分散 3/4

例題 11 84.3 %

例題 12 10.2 ℃以上 29.8 ℃以下

$\boxed{\text{例題 13}}$ $156.7 \leq \mu \leq 167.3$

$\boxed{\text{例題 14}}$ (1) 平均値 p，分散 pq　(2) 平均値 0.375，分散 0.234375

$\boxed{\text{例題 15}}$ (1)$0.263 \leq p \leq 0.537$　(2)$0.463 \leq p \leq 0.737$

$\boxed{\text{例題 16}}$ $0.233 \leq p \leq 0.267$

参考文献

[1] 改訂版 数学 B，数研出版

[2] P.G. ホーエル著，浅井晃，村上正康共訳，入門数理統計学，1978

[3] 小波秀雄，統計学入門，2020
このテキストは小波先生のホームページ　http://konamih.sakura.ne.jp/Stats/Text/
から無料でダウンロードできる

[4] 石井俊全，意味がわかる統計学，ベレ出版，2012

[5] 小島寛之，統計学入門，ダイヤモンド社，2006