不等式の公理

磯辺高等学校　氏家 悟

1　はじめに

「式と証明」の単元で，教科書では

実数の大小関係について，次の基本性質が成り立つ。

1. $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$　　2. $a > b \Rightarrow a + c > b + c,\ a - c.b - c$

3. $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$　4. $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$

と出ている。[1)]

この単元に差し掛かるといつも，2 の和の性質から差の性質[2)]を証明し，2 と 3 から 4 を証明してみせる。

4. $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$
(証明) 2. より $c < 0 \Rightarrow c + (-c) < 0 + (-c) \Rightarrow (-c) > 0$
3. より $a > b,\ (-c) > 0 \Rightarrow a(-c) > b(-c) \Rightarrow -ac > -bc$
2. より $-ac > -bc \Rightarrow -ac + (ac + bc) > -bc + (ac + bc) \Rightarrow bc > ac \Rightarrow ac < bc$

つまり，この 4 つのうち，基本性質といえるのは，1 と, 2 の和, および 3 だけであり，2 の差と 4 はそこから証明される性質といえる。

たとえば，負の数の積が正の数であることは，基本性質より証明される性質である。

定理 $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$

(証明) 4. より $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0b$, ゆえに $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$

逆に負の数の積が正の数であることを仮定すると,「 4. 不等式の両辺に負の数をかけると不等号の向きが変わる」が示されるという点で，これらは同値で，循環しているのである。

$a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$
(証明) 2. より $a < b \Rightarrow a + (-b) < b + (-b) \Rightarrow a - b < 0$
$a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$ より，$a - b < 0,\ c < 0 \Rightarrow (a - b)c > 0 \Rightarrow ac - bc > 0$
2. より，$ac - bc > 0 \Rightarrow ac - bc + bc > 0 + bc \Rightarrow ac > bc$

---

1) 「ならば (⇒) 」の前後のカンマは，⇒ の左のカンマは「かつ」，右のカンマは「または」というのが暗黙のルールではあるので，違う場合は明示が必要である。さらに，教科書の「ならば (⇒) 」は「左辺から右辺が成り立つ」という意味を含んだ使い方をしている。

2) 基本性質を「公理」というならば，そこから証明される性質は「定理」という位置づけになる。

2　不等式の性質の依存関係

1998 年当時，不等式の性質の依存関係を宿題にして調べさせたことがあった。

問 1　次のたくさんの性質の中には，他の性質から証明できるものがある．そのような関係を出来るだけ見つけて，矢印で図に表せ．

1. $a \geq b \iff a > b$ or $a = b$
2. $\mathrm{not}(a \geq b) \iff a < b$
3. $a \geq b$ かつ $a \neq b \iff a > b$
4. $a \geq a$
5. $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$
6. $a \geq b,\ a \leq b$ の少なくとも一方が成り立つ．
7. $a \geq 0,\ a \leq 0$ の少なくとも一方が成り立つ．
8. $a > b,\ a = b,\ a < b$ のいずれか一つが成り立つ．
9. $a > 0,\ a = 0,\ a < 0$ のいずれか一つが成り立つ．
10. $a > b \iff a - b > 0.$
11. $a \geq b \iff a - b \geq 0.$
12. $a > b \iff a + c > b + c$
13. $a \geq b \iff a + c \geq b + c$
14. $a > 0 \iff -a < 0$
15. $a \geq 0 \iff -a \leq 0$
16. $a > b \iff -a < -b$
17. $a \geq b \iff -a \leq -b$
18. $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$
19. $a \geq b,\ b \geq c \Rightarrow a \geq c$
20. $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow a + b > 0$
21. $a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$
22. $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow a + b < 0$
23. $a \leq 0,\ b \leq 0 \Rightarrow a + b \leq 0$
24. $a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$
25. $a \geq b,\ c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$
26. $a \geq b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$
27. $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$
28. $a \geq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$
29. $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$
30. $a \geq b,\ c \leq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
31. $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow ab > 0$
32. $a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$
33. $a > 0,\ b < 0 \Rightarrow ab < 0$
34. $a \geq 0,\ b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$
35. $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$
36. $a \leq 0,\ b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$
37. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
38. $a > b > 0,\ c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$
39. $a \geq b \geq 0,\ c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$
40. $a^2 \geq 0$
41. $1 > 0$

問 2　他の性質から証明できる性質を削っていき，最後に残るものは何か．

例として，教科書の基本性質である 12 から 14 を示し，さらに 基本性質 27 から，同じく教科書の基本性質の 29 を証明し，

「 $\{12, 14, 27\} \Rightarrow 29$ のように依存関係を調べること。」

「 27 も他から証明されるので，調べてみよう。」

と宿題にした。

次のプリントでは依存関係[3)]を列挙し，論理の循環を見つけさせる。

[3)] これらの証明は数学部会サイトの数学部会誌「$\alpha - \omega$」第 59 号に置きました。http://math.sakura.ne.jp/

いまのところわかっている依存関係は次の通り．
$1 \Leftarrow \{2,3\}$
$2 \Leftarrow \{1,8\}$
$3 \Leftarrow \{1,2\}$
$4 \Leftarrow \{1,8\}$
$5 \Leftarrow \{1,8\}$
$6 \Leftarrow \{1,8\},\{7,11\}$
$7 \Leftarrow \{6\},\{1,9\}$
$8 \Leftarrow \{9,10\},\{1,2,5,6\}$
$9 \Leftarrow \{8\},\{1,2,5,6\}$
$10 \Leftarrow \{12\}$
$11 \Leftarrow \{13\}$
$12 \Leftarrow \{10\}$
$13 \Leftarrow \{11\}$
$14 \Leftarrow \{10\},\{12\},\{29\},\{33\}$
$15 \Leftarrow \{11\},\{13\},\{30\},\{34\}$
$16 \Leftarrow \{10\},\{12\}$
$17 \Leftarrow \{11\},\{13\}$
$18 \Leftarrow \{10,20\},\{10,14,22\},\{12,24\}$
$19 \Leftarrow \{11,21\},\{11,15,23\},\{13,25\}$
$20 \Leftarrow \{12,18\},\{22,14\},\{24\}$
$21 \Leftarrow \{13,19\},\{23,15\},\{25\}$
$22 \Leftarrow \{12,18\},\{20,14\},\{24\}$
$23 \Leftarrow \{13,19\},\{21,15\},\{25\}$
$24 \Leftarrow \{10,20\},\{10,14,22\},\{12,18\}$
$25 \Leftarrow \{11,21\},\{11,15,23\},\{13,19\}$
$26 \Leftarrow \{1,10,24\}$
$27 \Leftarrow \{10,31\},\{10,35,14\},\{10,14,33\},\{12,29,14\}$
$28 \Leftarrow \{11,32\},\{11,36,15\},\{11,15,34\},\{13,30,15\}$
$29 \Leftarrow \{10,31,14\},\{10,35\},\{10,14,33\},\{12,27,14\}$
$30 \Leftarrow \{11,32,15\},\{11,36\},\{11,15,34\},\{13,28,15\}$
$31 \Leftarrow \{27\},\{29,14\},\{35,14\},\{33,14\}$
$32 \Leftarrow \{28\},\{30,15\},\{36,15\},\{34,15\}$
$33 \Leftarrow \{27\},\{29\},\{31,14\},\{35,14\}$
$34 \Leftarrow \{28\},\{30\},\{32,15\},\{36,15\}$
$35 \Leftarrow \{27,14\},\{29\},\{31,14\},\{33,14\}$
$36 \Leftarrow \{28,15\},\{30\},\{32,15\},\{34,15\}$
$37 \Leftarrow \{8,41,27,33\}$
$38 \Leftarrow \{18,27\}$
$39 \Leftarrow \{19,28\}$
$40 \Leftarrow \{32,36\},\{1,31,35\}$
$41 \Leftarrow \{1,40\}$

この表から不要なものを取り去る．

まず 2 は 1 か 3 があれば他のものと組み合わせて導かれるので不要である．

さらに，1, 3 は $\{8\}$, $\{4, 5\}$ を使って互いに導きあうので，いずれか一方は必要である．1, 3 は「記号の置き換えの約束」と考えられるので，公理ではなく定義とすることができる．つまり一方を定義すれば，他方は他の性質を使って証明可能な定理である．そしてこの「定義」は 2 種類の不等式の架け橋となるべき定義といえる．

次に 4, 5, 6, 7, 8, 9 について，$>$ グループの不等式を公理に採用するなら，8, 9 のいずれか一方は必要であるし，$\geq$ グループの不等式を公理に採用するなら，4, 5 の 2 つと，6, 7 のいずれか一方は必要である．そして 1 などを経由すれば， $\{8 \vee 9\} \iff \{4 \wedge 5 \wedge (6 \vee 7)\}$[a]
であることが示されるので，この右辺か左辺の少なくとも一方が必要である．

そして，12, 10 のいずれか一方，13, 11 のいずれか一方が必要である．

そこで，以上の自己完結している性質を依存関係の表から取り除く．そして，26, 38, 39 のように，他の性質を導くのに不要なものも除く．さらに 14, 15, 37, 40, 41 のように簡単に他の性質から示され明らかに基本性質になりそうにないものも取り除いてみる．並べ方も不等式の種類別に分ける．

[a] $\vee$ は「または」，$\wedge$ は「かつ」

$>$ グループ
$18 \Leftarrow \{20\},\{22\},\{24\}$
$20 \Leftarrow \{18\},\{22\},\{24\}$
$22 \Leftarrow \{18\},\{20\},\{24\}$
$24 \Leftarrow \{20\},\{22\},\{18\}$
$27 \Leftarrow \{31\},\{35\},\{33\},\{29\}$
$29 \Leftarrow \{31\},\{35\},\{33\},\{27\}$
$31 \Leftarrow \{27\},\{29\},\{35\},\{33\}$
$33 \Leftarrow \{27\},\{29\},\{31\},\{35\}$
$35 \Leftarrow \{27\},\{29\},\{31\},\{33\}$

$\geq$ グループ
$19 \Leftarrow \{21\},\{23\},\{25\}$
$21 \Leftarrow \{19\},\{23\},\{25\}$
$23 \Leftarrow \{19\},\{21\},\{25\}$
$25 \Leftarrow \{21\},\{23\},\{19\}$
$28 \Leftarrow \{32\},\{36\},\{34\},\{30\}$
$30 \Leftarrow \{32\},\{36\},\{34\},\{28\}$
$32 \Leftarrow \{28\},\{30\},\{36\},\{34\}$
$34 \Leftarrow \{28\},\{30\},\{32\},\{36\}$
$36 \Leftarrow \{28\},\{30\},\{32\},\{34\}$

このように，数学では．その性質をさかのぼると，堂々巡りになるので，その中で基本的と思えるものを「公理」として要請するのである．

「$>$ グループ」では 18, 20 ,22 ,24 のどれか一つ，27, 29, 31, 33, 35 のどれか一つがあれば他の性質が示され，「$\geq$ グループ」では 19, 21, 23, 25 のどれか一つ，28, 30, 32, 34, 36 のどれか一つがあればよい．

以上をまとめると，

$$\begin{tikzcd} 18 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & 24 \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\ 20 \arrow[r, leftrightarrow] & 22 \end{tikzcd}$$

・ 記号の定義として，1 か 3
・ $>$ グループの公理として，
　8 か 9 のいずれか一方
　12 か 10 のいずれか一方
　18, 20, 22, 24 の中のどれか一つ
　27, 29, 31, 33, 35 の中のどれか一つ．
・ $\geq$ グループの公理として，
　4, 5
　6 か 7 のいずれか一方
　13 か 11 のいずれか一方
　19, 21, 23, 25 の中のどれか一つ
　28, 30, 32, 34, 36 の中のどれか一つ．

となり，不等式の公理系として何通りも作ることができ，公理系は必ずしも一通りとは限らない．大きく分けて不等号の種類によって 2 グループあるが，そのなかでも，どの性質を公理にとるかは自由であるといえる．しかし公理と決めるときは必ず一通りにきめ，その公理以外の性質は「性質」として証明されるのである．

数学における「公理」とは，普段使う数学が，「矛盾なく，うまく整合するよう都合よく決めたもの」なのである．したがって，普遍的な性質というよりは，仮説といってよいものである．

公理主義は現代数学の基本的な立場であるが，実数や，自然数の公理では，証明が抽象的過ぎ，高校生には難しい。不等式ならば，それらに比べれば証明もわかりやすく，公理主義の考え方の入り口として，教材にしやすいと感じた。