等差数列の 4 乗の和の求め方

印旛明誠高等学校　西川 誠

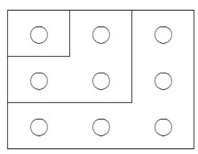
このレポートでは，$(2k-1)^4$ を展開しないで和を求める方法を 2 通り紹介したいと思います。まず第 1 に積分を使って等差数列の 4 乗の和の公式等を作る方法を紹介し，次に差分・和分を使っても効率的に求めることが出来ることを述べてみます。

(注) このレポートに出てくる $\sum$ は，ほとんど $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ の $k=1$ から n が省略されたものとします。また，微分とか積分をするときがありますが，すべて（例外なく）n での微分・積分 なので注意してください。省略して $\sum$ だけしか書いていない場合も，実際は，n の関数ということで，その n での微分・積分となります。

1　積分を利用した $\sum(2k-1)^4$ の求め方

等差数列としては，$a_n = 2n-1$ を例にとって説明してみます。また，何故に積分で求められるのかは，2 節で説明することにして，実際に積分で計算していく方法を先に説明したいと思います。まず，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^1 = n^2$ という式から出発します（今後，$\sum$ の $k=1$ から n を省略します）。

奇数の和は，平方数になるというのは，有名で，右の図は，$1+3+5=3^2$ を示す図ですが，このように図と一緒に記憶すると納得できる面白い性質です。



$\sum(2k-1) = n^2 \cdots$ ① という式の両辺を n で積分してやるのですが，少し注意が必要です。左辺を n で積分する場合には，k で積分するように考えて処理出来ることが，第 1 のポイントです。右辺は，実際に n で不定積分するのですが，積分定数は 0 とし，その代わりに，$\square \cdot n$ を付けてください。つまり，n の 1 次式の分だけずれが生じるので，$\square \cdot n$ を付ける必要があるのです。これが，第 2 のポイントです。第 1 と第 2 のポイントの詳しい理由は，2 節で説明します。結局，$\sum(2k-1) = n^2$ の両辺を n で積分してやると

$$\frac{1}{2\cdot 2}\sum(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n^3 + \square\cdot n \quad \cdots(ア)$$

という式が出来ます。左辺は，$(\quad)^1$ の積分なので，$1+1=2$ というのが分母にあり，もう 1 つの 2 は，$(2k-1)$ を一塊と見たときに，中身の微分で出てくる 2 を打ち消すように付けてあります。後は，(ア) の式が $n=1$ のときに成り立つように□を決定すればよいのです。

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \square \quad より \quad \square = -\frac{1}{12}$$

となります。これを (ア) に代入して，両辺を 4 倍すると，次のような公式 ② が得られました。

$$\sum(2k-1)^2 = \frac{4}{3}\cdot n^3 - \frac{1}{3}\cdot n \quad \cdots ②$$

② の両辺を，さらに n で積分すると

$$\frac{1}{2\cdot 3}\sum(2k-1)^3 = \frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{6}n^2 + \square\cdot n \quad \cdots (イ)$$

となり，後は，(イ) の式が $n=1$ のときに成り立つように□を決定します。

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \square \quad より \quad \square = 0$$

となります。これを (イ) に代入して，両辺を 6 倍すると，次のような公式 ③ が得られます。

$$\sum(2k-1)^3 = 2\cdot n^4 - n^2 \quad \cdots ③$$

これに具体的に $n=4$ を代入してみると，$1^3+3^3+5^3+7^3 = 2\cdot 4^4 - 4^2 = 2^9 - 2^4$ となっています。べき乗の和に関するちょっと変わった等式が得られました。③ の式の両辺を，さらに n で積分してやると

$$\frac{1}{2\cdot 4}\sum(2k-1)^4 = \frac{2}{5}n^5 - \frac{1}{3}n^3 + \square\cdot n \quad \cdots (ウ)$$

となり，後は，(ウ) の式が $n=1$ のときに成り立つように□を決定します。

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \square \quad より \quad \square = \frac{7}{120}$$

となります。これを (ウ) に代入して，両辺を 8 倍すると，次のような公式 ④ が得られます。

$$\sum(2k-1)^4 = \frac{16}{5}\cdot n^5 - \frac{8}{3}\cdot n^3 + \frac{7}{15}\cdot n \quad \cdots ④$$

以下，同様にやっていけば，$\sum(2k-1)^5$ 等も求めることが出来ます。

2　積分を使って求められることの証明

積分で求まる理由を簡単に説明しておきます (n，k は 0 以上の整数，m は自然数とします)。予備知識として，また，m が 1 以上の自然数なら，

$$\sum(ak+b)^m = \square\cdot n^{m+1} + \ \cdots\ + \square\cdot n \quad \cdots (カ)$$

のような形で表示できます。次数は，$(m+1)$ 次式で，定数項は，0 となります。つまり，(カ) の右辺に形式的に $n=0$ を代入すると 0 になります。形式的にというのは，左辺の $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^m$ に $n=0$ を代入することが無意味だからですが，証明をやるときに，$n=0$ のときには，和の値を 0 とすることが重要になってきます。また，n の多項式なので，もちろん n で微分可能です。まず，次の予備定理 I を証明します。(注)h_m は，m で決定する定数です。

予備定理 I

$S_m(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a\cdot k+b)^m$ とおくと，$S'_m(n)=m\cdot a\cdot S_{m-1}(n)+h_m$ となる。

（証明）$S_m(n)$ の定義から，$S_m(n)-S_m(n-1)=(a\cdot n+b)^m$ が，任意の n に対して成り立つので，この式の両辺を n で微分すると，

$$S'_m(n)-S'_m(n-1)=m\cdot a\cdot(a\cdot n+b)^{m-1}\quad\cdots\ (カ)$$

この (カ) の式の n に 1 から n を順に代入すると

$$\begin{gathered}S'_m(1)-S'_m(0)=m\cdot a\cdot(a\cdot 1+b)^{m-1}\\ S'_m(2)-S'_m(1)=m\cdot a\cdot(a\cdot 2+b)^{m-1}\\ \vdots\\ S'_m(n)-S'_m(n-1)=m\cdot a\cdot(a\cdot n+b)^{m-1}\end{gathered}$$

となり，これを，辺ごとに加えると

$$S'_m(n)-S'_m(0)=m\cdot a\cdot\sum_{k=1}^{n}(a\cdot k+b)^{m-1}=m\cdot a\cdot S_{m-1}(n)$$

より，$h_m=S'_m(0)$ とおけば，予備定理 I の式がでてきます。（証明終わり）

この予備定理 I から，$S_m(n)=\displaystyle\int m\cdot a\cdot S_{m-1}(n)\ dn+\int h_m\ dn$ で，両辺に $n=0$ を代入して，$S_m(0)=0$ から積分定数 $\mathrm{C}=0$ となり，$n=1$ を代入して，$S_m(1)=(a+b)^m$ などから n の係数 h_m が決まります。これらのことを踏まえて，例えば，$\sum(5k+3)^4$ を n で微分すると

$$\left\{\sum(5k+3)^4\right\}'=4\times 5\times\sum(5k+3)^3+\square$$

のように k で微分した感じとなるのです。

3　2 項係数と $\sum$ との相性

もう 1 つのやり方を説明するための準備として，まず，組合せの記号を少し拡張しておきます。便宜上，${}_0\mathrm{C}_0=1$ と約束し，$n<m$ のときは，${}_n\mathrm{C}_m=0$ とすることにします。これは，例えば ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ なので，ここに $n=1$ を代入すれば，${}_1\mathrm{C}_2=0$ になるというような話で，わりと自然な拡張だと思います。このような約束のもとで，予備定理 II を証明します。

予備定理 II

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_1$　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_1={}_n\mathrm{C}_2$　　③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_n\mathrm{C}_3$

（① の証明）　${}_0\mathrm{C}_0=1$ と仮定したので，$1+1+\cdots+1=n$ ということで成立します。

（② の証明）　$0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ということで成立します。

（③ の証明）　$\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}=\left\{\dfrac{k(k-1)(k-2)}{2}-\dfrac{(k-1)(k-2)(k-3)}{2}\right\}\dfrac{1}{3}$ と変形し，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ を代入して和をとれば，成り立つことがわかります。（証明終わり）

以下同様に，続けていけば，$\sum {}_{k-1}\mathrm{C}_m={}_n\mathrm{C}_{m+1}$ と一般化できます。

4　$\sum(2k-1)^4$ のもう一つの求め方

まず，$2k-1=2(k-1)+1=2\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ と見て $\sum$ を取ると，

$$\sum(2k-1)^1=2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1$$

と簡単に和が求まります。ここで，この結果を利用して $\sum(2k-1)^2$ に進まないで，$\sum$ を取る前の段階で，和が求まりやすい形になっているなら和が簡単に求まるということに注意しましょう。

$$(2k-1)^2=(2k-1)\cdot\{2(k-1)+1\}=\{2(k-2)+3\}\cdot 2(k-1)+\{2(k-1)+1\}\cdot 1$$

と見て計算してやるのが，次につながることになります。「$2(k-1)$」にかけるときと，「1」にかけるときとで，$(2k-1)$ を，少し変化させながらかけ算をする訳です。これで，

$$\begin{aligned}(2k-1)^2&=4(k-1)(k-2)+6(k-1)+2(k-1)+1\\&=4(k-1)(k-2)+8(k-1)+1\\&=8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_2+8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0\end{aligned}$$

と表示できます。これを，さらに続けていくと，

$$\begin{aligned}(2k-1)^3&=(2k-1)\cdot\{4(k-1)(k-2)+8(k-1)+1\}\\&=\{2(k-3)+5\}\cdot 4(k-1)(k-2)+\{2(k-2)+3\}\cdot 8(k-1)+\{2(k-1)+1\}\cdot 1\\&=8(k-1)(k-2)(k-3)+36(k-1)(k-2)+26(k-1)+1\\&=48\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_3+72\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_2+26\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0\end{aligned}$$

と表示できました。次に，これらの計算を行列表示して計算を機械的に出来るようにしましょう。$2k-1=2\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ から $(2k-1)^2=8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_2+8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ を作るには，「3 行 2 列」と「2 行 1 列」の行列の積と考えて（数字の記入されていない所は，0 です），

$$\begin{pmatrix}4&\\3&2\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\1\end{pmatrix}$$

と計算させてやれば良いのです。$(2k-1)^2=8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_2+8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ から
$(2k-1)^3=48\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_3+72\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_2+26\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ を作るには，「4 行 3 列」と「3 行 1 列」の行列の積と考えて，

$$\begin{pmatrix} 6 & & & \\ 5 & 4 & & \\ & 3 & 2 & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算してやります。かけ算してやる行列は，$(2k-1)$ を，少し変化させながらかけ算をしていることを考慮して作られているのですが，今は，1，2，3，4，$\cdots$ がきれいに並んでいます。次の $(2k-1)^4$ の式がほしいなら，

$$\begin{pmatrix} 8 & & & & \\ 7 & 6 & & & \\ & 5 & 4 & & \\ & & 3 & 2 & \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 384 \\ 768 \\ 464 \\ 80 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。これで，$(2k-1)^4 = 384 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_4 + 768 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_3 + 464 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_2 + 80 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_1 + {}_{k-1}\mathrm{C}_0$ と計算できて，和を取ると，

$$\sum (2k-1)^4 = 384 \cdot {}_n\mathrm{C}_5 + 768 \cdot {}_n\mathrm{C}_4 + 464 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + 80 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1$$

となることがすぐわかります。例えば，この式で $n = 10$ を代入してみれば，

$$1^4 + 3^4 + 5^4 + \cdots + 19^4 = 384 \cdot 252 + 768 \cdot 210 + 464 \cdot 120 + 80 \cdot 45 + 10 = 317338$$

となります。これは，公式 ④ に $n = 10$ を代入して

$$\sum (2k-1)^4 = \frac{16}{5} \cdot 10^5 - \frac{8}{3} \cdot 10^3 + \frac{7}{15} \cdot 10 = 317338$$

として得られる値と一致しています。

5　エクセルを利用した計算方法

これらの行列の計算をエクセルでやらせるための 1 つのやり方を紹介します。下の表のように，次々と行列を下に加えていくような形で作ると良いと思います。行列の積を計算した結果は，右端に出てくるように設定しています。48，72，26，1 は係数しか表示させていないので，自分で ${}_{k-1}\mathrm{C}_3$ 等を補って，
$(2k-1)^3 = 48 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_3 + 72 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_2 + 26 \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_1 + {}_{k-1}\mathrm{C}_0$
となる訳です。具体的な和の値がほしいなら，これで，$\sum$ を取ると $\sum (2k-1)^3$ は，

			2	
			1	
	4		8	← 4×2+0×1
	3	2	8	← 3×2+2×1
		1	1	← 0×2+1×1
6			48	
5	4		72	
	3	2	26	
		1	1	

$$\sum (2k-1)^3 = 48 \cdot {}_n\mathrm{C}_4 + 72 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + 26 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1$$

となるので，これに，具体的な n の値を入れてやれば，和が求まります。これらを加味して，

エクセルでやらせるなら，右側に式を追加してやります。下の図は，$n=10$ の場合の数値です (n の値は，どこかのセルに入力する形にしておきます)。
${}_{10}\mathrm{C}_4=210, {}_{10}\mathrm{C}_3=120, {}_{10}\mathrm{C}_2=45, {}_{10}\mathrm{C}_1=10$ に注意して計算します。

$n=\boxed{10}$

			2	90		← 2×45
			1	10	100	← 90+10
	4		8	960		← 8×120
	3	2	8	360		← 8×45
		1	1	10	1330	← 960+360+10
6			48	10080		← 48×210
5	4		72	8640		← 72×120
	3	2	26	1170		← 26×45
		1	1	10	19900	← 10080+8640+1170+10

このように，具体的に n の値を代入すれば，すぐ計算してくれます。

6 $\sum(5k+3)^4$ の積分を利用しての求め方

別の等差数列として，$a_n=5n+3$ で積分を使って 4 乗まで求めてみます。まず，$\sum(5k+3)=5\times\dfrac{n(n+1)}{2}+3n=\dfrac{5}{2}\cdot n^2+\dfrac{11}{2}\cdot n$ からスタートして，両辺を n で積分してやると，

$$\frac{1}{5\cdot 2}\sum(5k+3)^2=\frac{5}{2\cdot 3}\cdot n^3+\frac{11}{2\cdot 2}\cdot n+\square\cdot n$$

となり，$n=1$ のとき，$\dfrac{8^2}{10}=\dfrac{5}{6}+\dfrac{11}{4}+\square$ より $\square=\dfrac{169}{60}$ と確定し，これで，

$$\sum(5k+3)^2=\frac{25}{3}\cdot n^3+\frac{55}{2}\cdot n^2+\frac{169}{6}\cdot n$$

と求まります。以下，同様にやっていくと，

$$\sum(5k+3)^3=\frac{125}{4}\cdot n^4+\frac{275}{2}\cdot n^3+\frac{845}{4}\cdot n^2+132\cdot n$$

$$\sum(5k+3)^4=125\cdot n^5+\frac{1375}{2}\cdot n^4+\frac{4225}{3}\cdot n^3+1320\cdot n^2+\frac{3331}{6}\cdot n$$

と求まります。
例えば，最後の式で $n=10$ を代入すると，$8^4+13^4+18^4+23^4+\cdots+53^4=20920885$ となります。

7 $\sum(5k+3)^4$ のもう 1 つの求め方

まず，$5k+3=5(k-1)+8=5\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1+8\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_0$ からスタートして，今度は，$(5k+3)^2=(5k+3)\cdot\{5(k-1)+8\}=\{5(k-2)+13\}\cdot 5(k-1)+\{5(k-1)+8\}\cdot 8$ と見

て計算してやることになります。今は,「3 乗までの和」を表の形で示しておきます。

$n = \boxed{10}$

			5	225		← 5×45
			8	80	305	← 80＋225
	10		50	6000		← 50×120
	13	5	105	4725		← 105×45
		8	64	640	11365	← 6000＋4725＋640
15			750	157500		← 750×210
18	10		1950	234000		← 1950×120
	13	5	1685	75825		← 1685×45
		8	512	5120	472445	← 157500＋234000＋75825＋5120

これは,§ 6 で作った公式

$$\sum(5k+3)^3 = \frac{125}{4}\cdot n^4 + \frac{275}{2}\cdot n^3 + \frac{845}{4}\cdot n^2 + 132\cdot n$$

に $n = 10$ を代入した値と一致します。今は,$\sum(5k+3)^4$ の場合に同様な表を作ることは簡単なので,このあたりで終わりとします。

(参考文献)

1. 小野孝,「数論序説」,(裳華堂),1987 年発行
  この本の p4 の問題 1.4 が $2\left(\sum k\right)^4 = \sum k^7 + \sum k^5$ を示せというものです。私は,この本で初めて $2\left(\sum k\right)^4 = \sum k^7 + \sum k^5$ という等式を知りました。
2. 荒川恒男 · 伊吹山知義 · 金子昌信,「ベルヌーイ数とゼータ関数」,(牧野書店),2001 年発行
  このレポートで使用した予備定理などが紹介されています。
3. 丸山哲郎,「差分方程式序説」,(現代数学社),1981 年発行
  この本にも,積分して $\sum k^5$ などの求め方が書いてあるのですが,重点がベルヌーイ数とかベルヌーイ多項式の方にあるので,表示が簡単ではありません。
4. 西川誠,「1 円,5 円,10 円の 3 種類の硬貨で 567 円を支払う方法は,何通り?」,2010 年 $\alpha - \omega$ 第 48 号
5. 西川誠,「不思議な微分 $\left(\sum k^3\right)' = 3\sum k^2$ と $\sum k^3 = \left(\sum k\right)^2$ の拡張」,2006 年 $\alpha - \omega$ 第 44 号