

令和3年度 共通テスト (本試 令和3年1月17日実施)

数学I・数学A (70分, 100点)

第1問 (必答問題)(配点 30)

[1] c を正の整数とする。 x の 2 次方程式 $2x^2 + (4c - 3)x + 2c^2 - c - 11 = 0 \dots\dots$ ① について考える。

(1) $c = 1$ のとき、① の左辺を因数分解すると $(\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}})(x - \boxed{\text{ウ}})$ であ

るから、①の解は $x = -\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $c = 2$ のとき、①の解は $x = \frac{-\boxed{\text{エ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり、大きい方の解を α とす

ると $\frac{5}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また、 $m < \frac{5}{\alpha} < m + 1$ を満たす整数 m

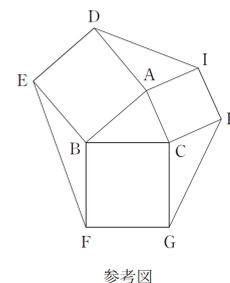
は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(3) 太郎さんと花子さんは、①の解について考察している。

太郎：①の解は c の値によって、ともに有理数である場合もあれば、ともに無理数である場合もあるね。 c がどのような値のときに、解は有理数になるのかな。
花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

①の解が異なる二つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

[2] 右の図のように、 $\triangle ABC$ の外側に辺 AB , BC , CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 $ADEB$, $BFGC$, $CHIA$ をかき、2 点 E と F , G と H , I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle CAB = A$, $\angle ABC = B$, $\angle BCA = C$ とする。



参考図

(1) $b = 6$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$ のとき、 $\sin A = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり、

$\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{タチ}}$, $\triangle AID$ の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

(2) 正方形 $BFGC$, $CHIA$, $ADEB$ の面積をそれぞれ S_1 , S_2 , S_3 とする。

このとき、 $S_1 - S_2 - S_3$ は

$\cdot 0^\circ < A < 90^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ト}}$ 。 $\cdot A = 90^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ナ}}$ 。

$\cdot 90^\circ < A < 180^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ニ}}$ 。

$\boxed{\text{ト}} \sim \boxed{\text{ニ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\textcircled{0}$ 0 である $\textcircled{1}$ 正の値である $\textcircled{2}$ 負の値である $\textcircled{3}$ 正の値も負の値もとる

(3) $\triangle AID$, $\triangle BEF$, $\triangle CGH$ の面積をそれぞれ T_1 , T_2 , T_3 とする。このとき、 $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

- ① $a < b < c$ ならば, $T_1 > T_2 > T_3$
- ② $a < b < c$ ならば, $T_1 < T_2 < T_3$
- ③ A が鈍角ならば, $T_1 < T_2$ かつ $T_1 < T_3$
- ④ a, b, c の値に関係なく, $T_1 = T_2 = T_3$

- (4) $\triangle ABC, \triangle AID, \triangle BEF, \triangle CGH$ のうち, 外接円の半径が最も小さいものを求める。 $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき, ID BC であり, ($\triangle AID$ の外接円の半径) ($\triangle ABC$ の外接円の半径) であるから, 外接円の半径が最も小さい三角形は
- ・ $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき, である。
 - ・ $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき, である。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

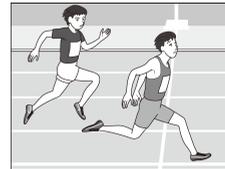
< = >

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\triangle ABC$ $\triangle AID$ $\triangle BEF$ $\triangle CGH$

第2問 (必答問題)(配点 30)

[1] 陸上競技の短距離 100m 走では, 100m を走るのにかかる時間 (以下, タイムと呼ぶ) は, 1 歩あたりの進む距離 (以下, ストライドと呼ぶ) と 1 秒あたりの歩数 (以下, ピッチと呼ぶ) に関する。ストライドとピッチはそれぞれ以下の式で与えられる。



$$\text{ストライド (m/歩)} = \frac{100(\text{m})}{100\text{m を走るのにかかった歩数 (歩)}}$$

$$\text{ピッチ (歩/秒)} = \frac{100\text{m を走るのにかかった歩数 (歩)}}{\text{タイム (秒)}}$$

ただし, 100m を走るのにかかった歩数は, 最後の 1 歩がゴールラインをまたぐこともあるので, 小数で表される。以下, 単位は必要のない限り省略する。

例えば, タイムが 10.81 で, そのときの歩数が 48.5 であったとき, ストライドは $\frac{100}{48.5}$ より約 2.06, ピッチは $\frac{48.5}{10.81}$ より約 4.49 である。

なお, 小数の形で解答する場合は, 解答上の注意にあるように, 指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えよ。また, 必要に応じて, 指定された桁まで①にマークせよ。

- (1) ストライドを x , ピッチを z とおく。ピッチは 1 秒あたりの歩数, ストライドは 1 歩あたりの進む距離なので, 1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度は, x と z を用いて (m/秒) と表される。

これより, タイムと, ストライド, ピッチとの関係は $\text{タイム} = \frac{100}{\text{ア}} \dots\dots ①$ と表されるので,

が最大になるときにタイムが最もよくなる。ただし, タイムがよくなるとは, タイムの値が小さくなることである。

の解答群

- ① $x + z$ ② $z - x$ ③ xz
- ④ $\frac{x+z}{2}$ ⑤ $\frac{z-x}{2}$ ⑥ $\frac{xz}{2}$

- (2) 男子短距離 100m 走の選手である太郎さんは, ①に着目して, タイムが最もよくなるストライドとピッチを考えることにした。

次の表は、太郎さんが練習で 100m を 3 回走ったときのストライドとピッチのデータである。

	1 回目	2 回目	3 回目
ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50

また、ストライドとピッチにはそれぞれ限界がある。太郎さんの場合、ストライドの最大値は 2.40，ピッチの最大値は 4.80 である。

太郎さんは、上の表から、ストライドが 0.05 大きくなるとピッチが 0.1 小さくなるという関係があると考えて、ピッチがストライドの 1 次関数として表されると仮定した。このとき、

ピッチ z はストライド x を用いて $z = \text{イウ} x + \frac{\text{エオ}}{5} \dots\dots ②$ と表される。

② が太郎さんのストライドの最大値 2.40 とピッチの最大値 4.80 まで成り立つと仮定すると、 x の値の範囲は次のようになる。 $\text{カ} . \text{キク} \leq x \leq 2.40$

$y = \text{ア}$ とおく。② を $y = \text{ア}$ に代入することにより、 y を x の関数として表すことができる。太郎さんのタイムが最もよくなるストライドとピッチを求めるためには、 $\text{カ} . \text{キク} \leq x \leq 2.40$ の範囲で y の値を最大にする x の値を見つければよい。このとき、 y の値が最大になるのは $x = \text{ケ} . \text{コサ}$ のときである。

よって、太郎さんのタイムが最もよくなるのは、ストライドが $\text{ケ} . \text{コサ}$ のときであり、このとき、ピッチは $\text{シ} . \text{スセ}$ である。また、このときの太郎さんのタイムは、①により ソ である。 ソ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

① 9.68	② 9.97	③ 10.09
④ 10.33	⑤ 10.42	⑥ 10.55

〔2〕 就業者の従事する産業は、勤務する事務所の主な経済活動の種類によって、第 1 次産業（農業、林業と漁業）、第 2 次産業（鉱業、建設業と製造業）、第 3 次産業（前記以外の産業）の三つに分類される。国の労働状況の調査（国勢調査）では、47 の都道府県別に第 1 次、第 2 次、第 3 次それぞれの産業ごとの就業者数が発表されている。ここでは都道府県別に、就業者数に対する各産業に就業する人数の割合を算出したものを、各産業の「就業者数割合」と呼ぶことにする。

(1) 図 1 は、1975 年度から 2010 年度まで 5 年ごとの 8 個の年度（それぞれを時点という）における都道府県別の三つの産業の就業者数割合を箱ひげ図で表したものである。各時点の箱ひげ図は、それぞれ上から順に第 1 次産業、第 2 次産業、第 3 次産業のものである。

次の ①～⑤のうち、図 1 から読み取れることとして正しくないものは タ と チ である。

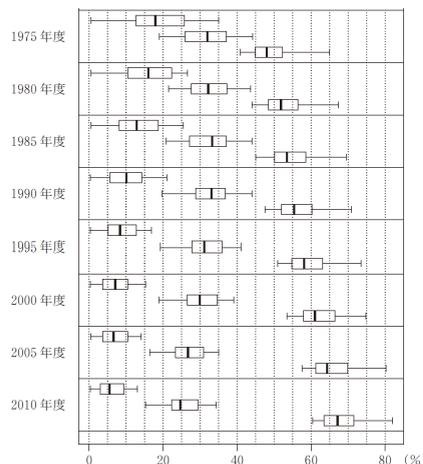


図 1 三つの産業の就業者数割合の箱ひげ図
(出典：総務省の Web ページにより作成)

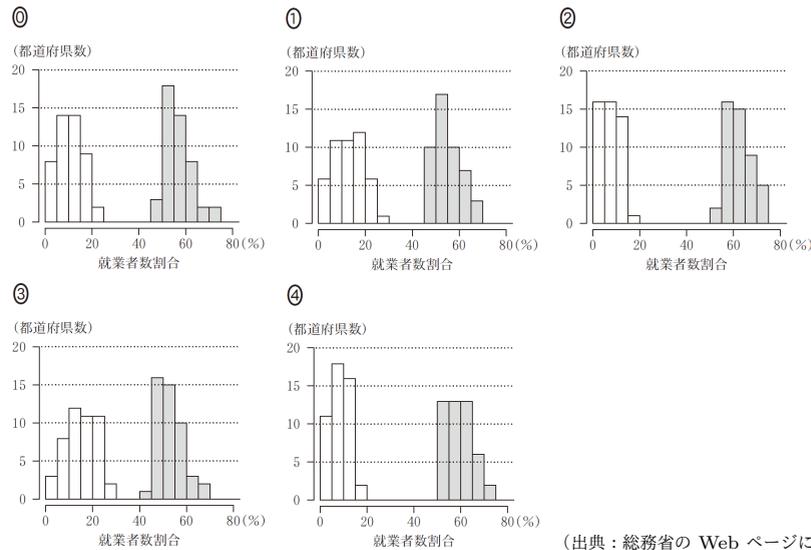
タ, チ の解答群 (解答の順序は問わない。)

- ① 第1次産業の就業者数割合の四分位範囲は、2000年度までは、後の時点になるにしたがって減少している。
- ② 第1次産業の就業者数割合について、左側のひげの長さや右側のひげの長さを比較すると、どの時点においても左側の方が長い。
- ③ 第2次産業の就業者数割合の中央値は、1990年度以降、後の時点になるにしたがって減少している。
- ④ 第2次産業の就業者数割合の第1四分位数は、後の時点になるにしたがって減少している。
- ⑤ 第3次産業の就業者数割合の第3四分位数は、後の時点になるにしたがって増加している。
- ⑥ 第3次産業の就業者数割合の最小値は、後の時点になるにしたがって増加している。

(2) (1) で取り上げた8時点の中から5時点を取り出して考える。各時点における都道府県別の、第1次産業と第3次産業の就業者数割合のヒストグラムを一つのグラフにまとめてかいたものが、次ページの五つのグラフである。それぞれの右側の網掛けしたヒストグラムが第3次産業のものである。なお、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

・1985年度におけるグラフは ツ である。・1995年度におけるグラフは テ である。

ツ テ については、最も適当なものを、次の①～④のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。



(3) 三つの産業から二つずつを組み合わせて都道府県別の就業者数割合の散布図を作成した。図2の散布図群は、左から順に1975年度における第1次産業(横軸)と第2次産業(縦軸)の散布図、第2次産業(横軸)と第3次産業(縦軸)の散布図、および第3次産業(横軸)と第1次産業(縦軸)の散布図である。また、図3は同様に作成した2015年度の散布図群である。

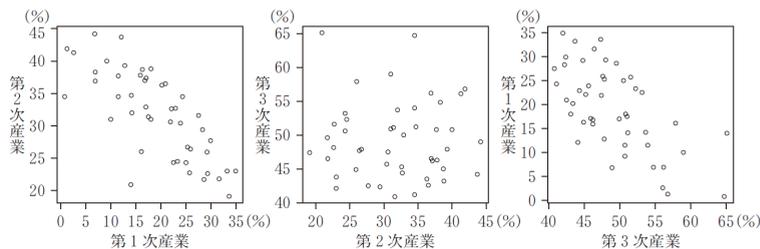


図2 1975年度の散布図群

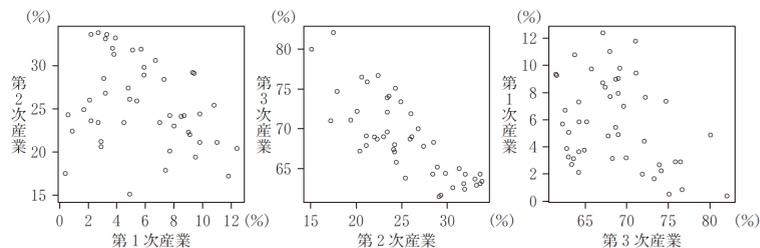


図3 2015年度の散布図群

(出典：図2、図3はともに総務省のWebページにより作成)

下の (I), (II), (III) は、1975 年度を基準としたときの、2015 年度の変化を記述したものである。ただし、ここで「相関が強くなった」とは、相関係数の絶対値が大きくなったことを意味する。

- (I) 都道府県別の第1次産業の就業者数割合と第2次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。
 - (II) 都道府県別の第2次産業の就業者数割合と第3次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。
 - (III) 都道府県別の第3次産業の就業者数割合と第1次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。
- (I), (II), (III) の正誤の組合せとして正しいのは ト である。

ト の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(II)	正	正	誤	誤	正	正	誤
(III)	正	誤	正	誤	正	誤	正

- (4) 各都道府県の就業者数の内訳として男女別の就業者数も発表されている。そこで、就業者数に対する男性・女性の就業者数の割合をそれぞれ「男性の就業者数割合」、「女性の就業者数割合」と呼ぶことにし、これらを都道府県別に算出した。図4は、2015年度における都道府県別の、第1次産業の就業者数割合(横軸)と、男性の就業者数割合(縦軸)の散布図である

各都道府県の、男性の就業者数と女性の就業者数を合計すると就業者数の全体となることに注意すると、2015年度における都道府県別の、第1次産業の就業者数割合(横軸)と、女性の就業者数割合(縦軸)の散布図は ナ である。

ナ については、最も適当なものを、下の ①~③のうちから一つ選べ。なお、設問の都合で各散

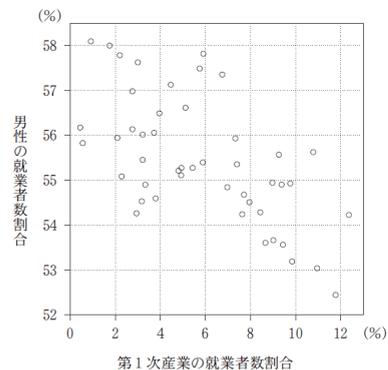
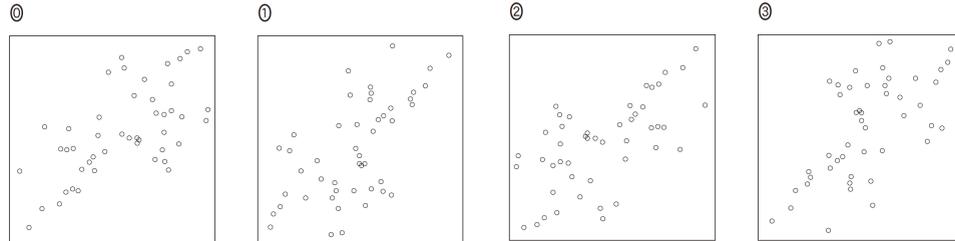


図4 都道府県別の、第1次産業の就業者数割合と、男性の就業者数割合の散布図

(出典：総務省のWebページにより作成)

布図の横軸と縦軸の目盛りは省略しているが、横軸は右方向、縦軸は上方向がそれぞれの正の方向である。



第3問 (選択問題) (配点 20)

中にくじが入っている箱が複数あり、各箱の外見は同じであるが、当たりくじを引く確率は異なっている。くじ引きの結果から、どの箱からくじを引いた可能性が高いかを、条件付き確率を用いて考えよう。

(1) 当たりくじを引く確率が $\frac{1}{2}$ である箱 A と、当たりくじを引く確率が $\frac{1}{3}$ である箱 B の二つの箱の場合を考える。

(i) 各箱で、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したとき

箱 A において、3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$... ①

箱 B において、3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$... ②

である。

(ii) まず、A と B のどちらか一方の箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したところ、3 回中ちょうど 1 回当たった。このとき、箱 A が選ばれる事象を A、箱 B が選ばれる事象を B、3 回中ちょうど 1 回当たる事象を W とすると $P(A \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ 、 $P(B \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W)$ であるから、3 回中ちょうど 1 回当たったとき、選んだ箱が A である条件付き確率 $P_W(A)$ は $\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ となる。また、条件付き確率 $P_W(B)$ は

$\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ となる。

(2) (1) の $P_W(A)$ と $P_W(B)$ について、次の事実 (*) が成り立つ。

事実 (*)

$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の $\boxed{\text{ス}}$ は、①の確率と②の確率の $\boxed{\text{ス}}$ に等しい。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群 $\boxed{\text{㉔}}$ 和 $\boxed{\text{㉕}}$ 2乗の和 $\boxed{\text{㉖}}$ 3乗の和 $\boxed{\text{㉗}}$ 比 $\boxed{\text{㉘}}$ 積

(3) 花子さんと太郎さんは事実 (*) について話している。

花子：事実 (*) はなぜ成り立つのかな？

太郎： $P_W(A)$ と $P_W(B)$ を求めるのに必要な $P(A \cap W)$ と $P(B \cap W)$ の計算で、①,②の確率に同じ数 $\frac{1}{2}$ をかけているからだよ。

花子：なるほどね。外見が同じ三つの箱の場合は、同じ数 $\frac{1}{3}$ をかけることになるので、同様のことが成り立ちそうだね。

当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C の三つの箱の場合を考える。まず、A、B、C のうちどれか一つの箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したところ、3 回中ちょうど 1 回当たった。このとき、選んだ箱が A である条件付き確率は $\frac{\text{セソタ}}{\text{チツテ}}$ となる。

- (4) 花子：どうやら箱が三つの場合でも、条件付き確率の \square ス は各箱で 3 回中ちょうど 1 回当たりくじを引く確率の \square ス になっているみたいだね。
太郎：そうだね。それを利用すると、条件付き確率の値は計算しなくても、その大きさを比較することができるね。

当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C、 $\frac{1}{5}$ である箱 D の四つの箱の場合を考える。まず、A、B、C、D のうちどれか一つの箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したところ、3 回中ちょうど 1 回当たった。このとき、条件付き確率を用いて、どの箱からくじを引いた可能性が高いかを考える。可能性の高い方から順に並べると \square ト となる。

\square ト の解答群

- ① A, B, C, D ② A, B, D, C ③ A, C, B, D ④ A, C, D, B
⑤ A, D, B, C ⑥ B, A, C, D ⑦ B, A, D, C ⑧ B, C, A, D
⑨ B, C, D, A

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

円周上に 15 個の点 P_0, P_1, \dots, P_{14} が反時計回りに順に並んでいる。最初、点 P_0 に石がある。さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに 5 個先の点に移動させ、奇数の目が出たら石を時計回りに 3 個先の点に移動させる。この操作を繰り返す。例えば、石が点 P_5 にあるとき、さいころを投げて 6 の目が出たら石を点 P_{10} に移動させる。次に、5 の目が出たら点 P_{10} にある石を点 P_7 に移動させる。

- (1) さいころを 5 回投げて、偶数の目が \square ア 回、奇数の目が \square イ 回出れば、点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。このとき $x = \square$ ア, $y = \square$ イ は、不定方程式 $5x - 3y = 1$ の整数解になっている。
- (2) 不定方程式 $5x - 3y = 8 \dots \dots$ ① のすべての整数解 x, y は、 k を整数として $x = \square$ ア $\times 8 + \square$ ウ $k, y = \square$ イ $\times 8 + \square$ エ k と表される。① の整数解 x, y の中で、 $0 \leq y < \square$ エ を満たすものは $x = \square$ オ, $y = \square$ カ である。したがって、さいころを \square キ 回投げて、偶数の目が \square オ 回、奇数の目が \square カ 回出れば、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。
- (3) (2) において、さいころを \square キ 回より少ない回数だけ投げて、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることはできないだろうか。

(*) 石を反時計回りまたは時計回りに 15 個先の点に移動させると元の点に戻る。

(*) に注意すると、偶数の目が \square ク 回、奇数の目が \square ケ 回出れば、さいころを投げる回数が \square コ 回で、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。このとき、 \square コ $< \square$ キ である。

- (4) 点 P_1, P_2, \dots, P_{14} のうちから点の一つを選び、点 P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる。そのために必要となる、さいころを投げる最小回数を考える。例えば、さいころを 1 回だけ投げて点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることはできないが、さいころを 2 回投げて偶数の目と奇数の目が 1 回ずつ出れば、点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることができる。したがって

、点 P_2 を選んだ場合には、この最小回数は 2 回である。

点 P_1, P_2, \dots, P_{14} のうち、この最小回数が最も大きいのは点 であり、その最小回数は 回である。

の解答群

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

$\triangle ABC$ において、 $AB = 3, BC = 4, AC = 5$ とする。 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると $BD = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ 、 $AD = \frac{\text{ウ}}{\text{オ}} \sqrt{\text{エ}}$ である。また、 $\angle BAC$ の二等分線と $\triangle ABC$ の

外接円 O との交点で点 A とは異なる点を E とする。 $\triangle AEC$ に着目すると $AE = \text{カ} \sqrt{\text{キ}}$ である。

$\triangle ABC$ の 2 辺 AB と AC の両方に接し、外接円 O に内接する円の中心を P とする。円 P の半径を r とする。さらに、円 P と外接円 O との接点を F とし、直線 PF と外接円 O との交点で点 F とは異なる点を G とする。このとき $AP = \sqrt{\text{ク}} r$ 、 $PG = \text{ケ} - r$ と表せる。したがって、方べきの定理により $r = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

$\triangle ABC$ の内心を Q とする。内接円 Q の半径は で、 $AQ = \sqrt{\text{ス}}$ である。また、円 P と辺 AB との接点を H とすると、 $AH = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ である。

以上から、点 H に関する次の (a)、(b) の正誤の組合せとして正しいものは である。

- (a) 点 H は 3 点 B, D, Q を通る円の周上にある。
- (b) 点 H は 3 点 B, E, Q を通る円の周上にある。

の解答群

	<input type="text" value="①"/>	<input type="text" value="②"/>	<input type="text" value="③"/>
(a)	正	正	誤
(b)	正	誤	正

数学 II・数学 B (60 分, 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

[1] (1) 次の問題 A について考えよう。

問題 A 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

$\sin \frac{\pi}{\text{ア}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos \frac{\pi}{\text{ア}} = \frac{1}{2}$ であるから、三角関数の合成により $y =$

$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{\text{ア}} \right)$ と変形できる。よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{\text{ウ}}$ で最大

値 をとる。

(2) p を定数とし、次の問題 B について考えよう。

問題 B 関数 $y = \sin \theta + p \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

- (i) $p = 0$ のとき, y は $\theta = \frac{\pi}{\text{オ}}$ で最大値 カ をとる。
- (ii) $p > 0$ のときは, 加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ を用いると $y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{\text{キ}}$ $\cos(\theta - \alpha)$ と表すことができる。ただし, α は $\sin \alpha = \frac{\text{ク}}{\sqrt{\text{キ}}}$, $\cos \alpha = \frac{\text{ケ}}{\sqrt{\text{キ}}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たすものとする。このとき, y は $\theta = \text{コ}$ で最大値 $\sqrt{\text{サ}}$ をとる。
- (iii) $p < 0$ のとき, y は $\theta = \text{シ}$ で最大値 ス をとる。

$\text{キ} \sim \text{ケ}$, サ , ス の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ① -1 | ② 1 | ③ -p | ④ p | ⑤ 1-p |
| ⑥ 1+p | ⑦ -p ² | ⑧ p ² | ⑨ 1-p ² | ⑩ 1+p ² |
| Ⓐ (1-p) ² | Ⓑ (1+p) ² | | | |

コ , シ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-----|-----|-------------------|
| ① 0 | ② a | ③ $\frac{\pi}{2}$ |
|-----|-----|-------------------|

[2] 二つの関数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ について考える。

- (1) $f(0) = \text{セ}$, $g(0) = \text{ソ}$ である。また, $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から, $x = \text{タ}$ で最小値 チ をとる。 $g(x) = -2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{\text{ツ}} - \text{テ})$ である。

- (2) 次の①~④は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = \text{ト} \quad \dots \text{①} \quad g(-x) = \text{ナ} \quad \dots \text{②}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \text{ニ} \quad \dots \text{③} \quad g(2x) = \text{ヌ} \quad f(x)g(x) \quad \dots \text{④}$$

ト , ナ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| ① $f(x)$ | ② $-f(x)$ | ③ $g(x)$ | ④ $-g(x)$ |
|----------|-----------|----------|-----------|

- (3) 花子さんと太郎さんは, $f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子: ①~④は三角関数の性質に似ているね。
 太郎: 三角関数の加法定理に類似した式 (A)~(D) を考えてみたけど, つねに成り立つ式はあるだろうか。
 花子: 成り立たない式を見つけるために, 式 (A)~(D) の β に何か具体的な値を代入して調べたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$$f(\alpha - \beta) = f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta) \dots \dots \text{(A)}$$

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \dots \dots \text{(B)}$$

$$g(\alpha - \beta) = f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \dots \dots \text{(C)}$$

$$g(\alpha + \beta) = f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta) \dots \dots \text{(D)}$$

- (1), (2) で示されたことのいくつかの利用すると, 式 (A)~(D) のうち, ネ 以外の三つは成り立たないことがわかる。 ネ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

ネ の解答群 ① (A) ② (B) ③ (C) ④ (D)

第2問 (必答問題) (配点 30)

(1) 座標平面上で、次の二つの2次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3 \dots\dots ①$ $y = 2x^2 + 2x + 3 \dots\dots ②$

①, ②の2次関数のグラフには次の共通点がある。

共通点
 ・y軸との交点のy座標は ア である。
 ・y軸との交点における接線の方程式は $y =$ イ $x +$ ウ である。

次の①~⑤の2次関数のグラフのうち、y軸との交点における接線の方程式が $y =$ イ $x +$

ウ となるものは エ である。

エ の解答群

① $y = 3x^2 - 2x - 3$ ① $y = -3x^2 + 2x - 3$ ② $y = 2x^2 + 2x - 3$
 ③ $y = 2x^2 - 2x + 3$ ④ $y = -x^2 + 2x + 3$ ⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$

a, b, c を0でない実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(0, \text{オ})$ における接線を l とすると、その方程式は $y =$ カ $x +$ キ である。

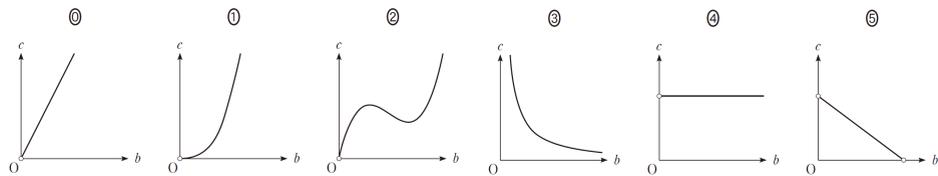
接線 l と x 軸との交点の x 座標は $\frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$ である。

a, b, c が正の実数であるとき、曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 l および直線 $x = \frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$ で囲

まれた図形の面積を S とすると $S = \frac{ac \text{サ}}{\text{シ} b \text{ス}}$ $\dots\dots ③$ である。

③において、 $a = 1$ とし、 S の値が一定となるように正の実数 b, c の値を変化させる。このとき、 b と c の関係を表すグラフの概形は セ である。

セ については、最も適当なものを、下の①~⑥のうちから一つ選べ。



(2) 座標平面上で、次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \dots\dots ④$ $y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \dots\dots ⑤$

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5 \dots\dots ⑥$

④, ⑤, ⑥の3次関数のグラフには次の共通点がある。

共通点
 ・y軸との交点のy座標は ソ である。
 ・y軸との交点における接線の方程式は $y =$ タ $x +$ チ である。

a, b, c, d を0でない実数とする。曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $(0, \text{ツ})$ における接線の方程式は $y =$ テ $x +$ ト である。

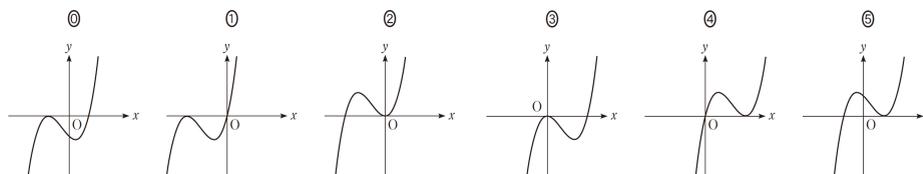
次に、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) =$ テ $x +$ ト とし、 $f(x) - g(x)$ について

考える。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。 a, b, c, d が正の実数であるとき、 $y = h(x)$ のグラフの概形は である。

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標 $\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$ と である。また、 x が $\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$ と の間を動くとき、 $|f(x) - g(x)|$ の値が最大となるのは、 $x = \frac{\text{ハヒフ}}{\text{ヘホ}}$ のときである。

については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。



第3問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 29 ページの正規分布表^{*1)}を用いてもよい。

Q 高校の校長先生は、ある日、新聞で高校生の読書に関する記事を読んだ。そこで、Q 高校の生徒全員を対象に、直前の 1 週間の読書時間に関して、100 人の生徒を無作為に抽出して調査を行った。その結果、100 人の生徒のうち、この 1 週間に全く読書をしなかった生徒が 36 人であり、100 人の生徒のこの 1 週間の読書時間 (分) の平均値は 204 であった。Q 高校の生徒全員のこの 1 週間の読書時間の母平均を m 、母標準偏差を 150 とする。

- (1) 全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とする。このとき、100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を X とすると、 X は に従う。また、 X の平均 (期待値) は 、標準偏差は である。

については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|----------------------|----------------------|
| ① 正規分布 $N(0, 1)$ | ② 正規分布 $N(100, 0.5)$ |
| ③ 二項分布 $B(100, 0.5)$ | ④ 正規分布 $N(100, 36)$ |
| ⑤ 二項分布 $B(100, 36)$ | |

- (2) 標本の大きさ 100 は十分に大きいので、100 人のうち全く読書をしなかった生徒の数は近似的に正規分布に従う。

全く読書をしなかった生徒の母比率 0.5 とするとき、全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_5 とおく。 p_5 の近似値を求めると、 $p_5 = \text{オ}$ である。

また、全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.4 とするとき、全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_4 とおくと、 である。

については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| ① 0.001 | ② 0.026 | ③ 0.050 | ④ 0.133 | ⑤ 0.497 |
|---------|---------|---------|---------|---------|

の解答群 $p_4 < p_5$ $p_4 = p_5$ $p_4 > p_5$

- (3) 1 週間の読書時間の母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を $C_1 \leq m \leq C_2$ とする。標本の大きさ 100 は十分に大きいことと、1 週間の読書時間の標本平均が 204、母標準偏差が 150 であることを用いると、 $C_1 + C_2 = \text{キクケ}$ 、 $C_2 - C_1 = \text{コサ}$ 、 であることがわかる。

*1) 原文のまま。正規分布表は本誌には未掲載。

また、母平均 m と C_1 , C_2 については、。

の解答群

- ① $C_1 \leq m \leq C_2$ が必ず成り立つ
 ② $m \leq C_2$ は必ず成り立つが、 $C_1 \leq m$ が成り立つとは限らない
 ③ $C_1 \leq m$ は必ず成り立つが、 $m \leq C_2$ が成り立つとは限らない
 ④ $C_1 \leq m$ も $m \leq C_2$ も成り立つとは限らない

- (4) Q 高校の図書委員長も、校長先生と同じ記事を読んだため、校長先生が調査をしていることを知らずに、図書委員会として校長先生と同様の調査を独自に行った。ただし、調査期間は校長先生による調査と同じ直前の 1 週間であり、対象を Q 高校の生徒全員として 100 人の生徒を無作為に抽出した。その調査における、全く読書しなかった生徒の数を n とする。

校長先生の調査結果によると全く読書をしなかった生徒は 36 人であり、.

の解答群

- ① n は必ず 36 に等しい
 ② n は必ず 36 より大きい
 ③ n は必ず 36 未満である
 ④ n と 36 との大小がわからない

- (5) (4) の図書委員会が行った調査結果による母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を $D_1 \leq m \leq D_2$, 校長先生が行なった調査結果による母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を (3) の $C_1 \leq m \leq C_2$ とする。ただし、母集団は同一であり、1 週間の読書時間の母標準偏差は 150 とする。

このとき、次の①~⑤のうち、正しいものは と である。

, の解答群 (解答の順序は問わない。)

- ① $C_1 = D_1$ と $C_2 = D_2$ が必ず成り立つ。
 ② $C_1 < D_2$ または $D_1 < C_2$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ。
 ③ $D_2 < C_1$ または $C_2 < D_1$ となる場合もある。
 ④ $C_2 - C_1 > D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。
 ⑤ $C_2 - C_1 = D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。
 ⑥ $C_2 - C_1 < D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

初項 3, 公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし, 初項 3, 公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし, $p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらに, これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_n b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots ①$$

- (1) p と r の値を求めよう。自然数 n について, a_n, a_{n+1}, b_n はそれぞれ

$$a_n = \text{ア} + (n-1)p \dots\dots ② \quad a_{n+1} = \text{ア} + np \dots\dots ③ \quad b_n = \text{イ} r^{n-1}$$

と表される。 $r \neq 0$ により, すべての自然数 n について, $b_n \neq 0$ となる。 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから,

$$\text{①の両辺を } b_n \text{ で割ることにより } \text{ウ} a_{n+1} = r(a_n + \text{エ}) \dots\dots ④ \text{ が成り立つ}$$

ことがわかる。④に②と③を代入すると $(r - \text{オ})pn = r(p - \text{カ}) + \text{キ} \dots$

⑤となる。⑤がすべての n で成り立つことおよび $p \neq 0$ により, $r = \text{オ}$ を得る。さらに,

このことから, $p = \text{ク}$ を得る。

以上から, すべての自然数 n について, a_n と b_n が正であることもわかる。

- (2) $p = \text{ク}$, $r = \text{オ}$ であることから, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は, それぞ

れ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} n(n + \boxed{\text{サ}}) \quad \sum_{k=1}^n b_k = \boxed{\text{シ}} (\boxed{\text{オ}}^n - \boxed{\text{ス}})$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して、初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots \textcircled{6}$$

a_n が正であることから、 $\textcircled{6}$ を変形して、 $c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}} a_{n+1}}{a_n + \boxed{\text{ソ}}} c_n$ を得る。さらに、 $p = \boxed{\text{ク}}$

であることから、数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{\text{タ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- $\textcircled{0}$ すべての項が同じ値をとる数列である
- $\textcircled{1}$ 公差が 0 でない等差数列である
- $\textcircled{2}$ 公比が 1 より大きい等比数列である
- $\textcircled{3}$ 公比が 1 より小さい等比数列である
- $\textcircled{4}$ 等差数列でも等比数列でもない

(4) q, n は定数で、 $q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して、初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots \textcircled{7}$$

$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから、 $\textcircled{7}$ を変形して、 $d_{n+1} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{q} (d_n + u)$ を得る。したがって、数列 $\{d_n\}$ が、公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は、 $q > \boxed{\text{ツ}}$ かつ $u = \boxed{\text{テ}}$ である。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

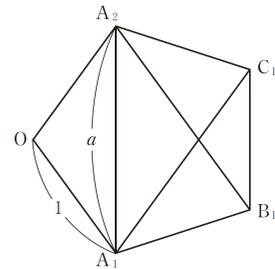
1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを a とする。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。

$\angle A_1C_1B_1 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$, $\angle C_1A_1A_2 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ となることから、 $\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。ゆえに $\overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{\text{ウ}} \overrightarrow{B_1C_1}$ であるから $\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} \overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$

また、 $\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で、さらに、 $\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = -\boxed{\text{ウ}} \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \boxed{\text{ウ}} \overrightarrow{OA_2} = (\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}) (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$

となる。したがって $\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$ が成り立つ。 $a > 0$ に注意してこれを解くと、 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を得る。



(2) 下の図のような、1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。正十二面体とは、どの面もすべて合同な正五角形であり、どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。

面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。 $\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから
 $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + \boxed{\text{ウ}}$ $\overrightarrow{OA_1}$ である。

また $|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = |\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = \frac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ に注意す

ると $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ を得る。

ただし, $\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{サ}}$ は, 文字 a を用いない形で答えること。

次に, 面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \boxed{\text{ウ}}$ $\overrightarrow{OA_2}$
 である。さらに $\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$

が成り立つことがわかる。ゆえに
 $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = \boxed{\text{シ}}$, $\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = \boxed{\text{ス}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | | |
|---------------------------|---------------------------|------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ -1 | ④ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | ⑤ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ |
| ⑥ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | ⑦ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | ⑧ $-\frac{1}{2}$ | ⑨ $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ | ⑩ $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ |

最後に, 面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。 $\overrightarrow{B_2D} = \boxed{\text{ウ}}$ $\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$ であることに注意すると,
 4点 O, B_1, D, B_2 は同一平面上にあり, 四角形 OB_1DB_2 は $\boxed{\text{セ}}$ こ
 とがわかる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- | |
|---------------------------|
| ① 正方形である |
| ② 正方形ではないが, 長方形である |
| ③ 正方形ではないが, ひし形である |
| ④ 長方形でもひし形でもないが, 平行四辺形である |
| ⑤ 平行四辺形ではないが, 台形である |
| ⑥ 台形ではない |

ただし, 少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

