連載：すうトレッチ (第 10 回)

「すうトレッチ」は今回で 10 回目を迎えます。高校生でも解けるような問題ですので，授業の合間に出題してはいかがでしょうか。

それでは問題です。

【問題 1】
「n^3+9 と $(n+1)^3+9$ は互いに素か示せ。そうでなければ，そうでない最小の n を求めよ。」

これは，ちょっと面白い問題です。n^3 と $(n+1)^3$ は，互いに素ですから，これらも一見すると互いに素であると考えるかもしれません。でも，高校 1 年生の知識で解けるので是非考えてみてください。

次は，整数の問題です。

【問題 2】
「a，b は正の整数とする。a 以上 b 以下の整数を足すと 2020 になるような a と b の組のうち，a が最も小さいものを求めよ。」

これも，考え方にちょっとした工夫が必要です。

次は漸化式の問題です。

【問題 3】
「$a_1=1,\ a_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,
$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ のとき，
数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。」

普通に隣接 3 項間漸化式の解き方で解いてもよいですが，もっと簡単に解ける方法があります。実際に一般項がわかると「なぁんだ！」とつぶやいてしまいそうな問題です。

たまには，ゆっくり図形を書いて考えてみるのもいいでしょう。

【問題 4】
「鋭角三角形 ABC について，頂点 B, C から対辺に下ろした垂線を $\mathrm{BB_1}, \mathrm{CC_1}$ とし，その交点を H とする。次に辺 BH, CH 上に $\mathrm{BB_2}=\mathrm{B_1H}$, $\mathrm{CC_2}=\mathrm{C_1H}$ となるように $\mathrm{B_2}, \mathrm{C_2}$ をとる。$\triangle \mathrm{B_2HC_2}$ の外接円と $\triangle$ABC の外接円の交点を D, E とするとき，$\angle \mathrm{DEH}=90^\circ$ であることを証明せよ。」

動的幾何ソフト (Geogebra など) で書いてみても面白いかもしれません。

最後は，以前に小中学生に出題した問題。

【問題 5】
「1000 以下の自然数で，正の約数を最も多く持つ数はいくつでしょう。

コンピュータで計算することもできますが，論理的に考えていくことで答えが見えてきます。意味が分かってくれば，10000 以下でも数分で答えがわかります。

それでは解答です。

【問題 1】 $n=533$
【問題 2】 $a=31,\ b=70$
【問題 3】 $a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$
【問題 4】 証明は省略します。
【問題 5】 840

【編集委員会】