数列の一般項と漸化式及び2倍角の公式

印旛明誠高等学校　西川 誠

数字の並びが「1，3，12，⋯」のように具体的に与えられたときに，その数列の一般項が求められるのは，その数列の階差数列が，等差数列か等比数列になっている場合がほとんどで，少しレベルが高くて，第 2 階差を考える程度の問題が主流です。今回のレポートでは，それらを，もう少し拡大してみようという試みです。もちろん，いつでも可能な訳ではありませんし，数列が具体的に何項か与えられているだけでは，その条件を満たす数列は，無数に存在しますから，一般項を求めるための 1 つの方法を紹介しているだけのことと，気楽に読んでいただけると幸いです。

1　一般項を求める問題（初級）

問題 1

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。1，3，12，42，156，564, ⋯

(解答) 階差を取ってみると，2，9，30，114，408, ⋯ となりますが，これだけでは，特徴がわからず，もう一度階差を取ったとしてもよくわからない状態が続きそうです。ここで，この数列が，指数関数的に増加していることに注意して，この数列は，2 つの等比数列の和の形になっているのではないかと予想してみましょう。それならば，その元になっている 2 つの等比数列は，どのようにして見つけることができるのでしょうか。それには，「2 つの等比数列の和の形」になっている数列が，3 項間の漸化式を解くときによく出てくる数列だということを逆に利用して，漸化式 $a_{n+2} = x \cdot a_{n+1} + y \cdot a_n$ が成り立つと仮定してみましょう。
そうすると，$x \cdot a_2 + y \cdot a_1 = a_3$ と $x \cdot a_3 + y \cdot a_2 = a_4$ が成り立つ必要があり，これを，x , y の連立方程式と考えて解くと，

$$x = \frac{a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4}{(a_2)^2 - a_1 \cdot a_3} = \frac{3 \cdot 12 - 1 \cdot 42}{3^2 - 1 \cdot 12} = 2$$

$$y = \frac{a_2 \cdot a_4 - (a_3)^2}{(a_2)^2 - a_1 \cdot a_3} = \frac{3 \cdot 42 - 12^2}{3^2 - 1 \cdot 12} = 6$$

となります。今は，初項から第 4 項までを使って，x，y を求めたのですが，これは，第 2 項から第 5 項までを使って解いたとしても，同じ x，y の値にならないと駄目です。もしも，違う値になってしまったのなら，この数列は，「2 つの等比数列の和の形」で表現することができない数列であると断定できます。実際に，計算する場合は，先ほどやった y の計算を添え字を n のままで処理すると，$(a_{n+1})^2 - a_n \cdot a_{n+2} = \{(a_2)^2 - a_1 \cdot a_3\} \cdot (-y)^{n-1}$ という等式が示せるので，この等式に最初に注目するのがよさそうです。この式は，フィボナッチ数列では，結

構有名な式で，大学入試問題でもときどき見かけます。つまり，$(a_{n+1})^2 - a_n \cdot a_{n+2}$ の値を，いくつか計算してやり，それらの比が一定の数になるかどうかをチェックしてみようということです。

例えば，この問題なら，$3^2 - 1 \cdot 12 = -3$，$12^2 - 3 \cdot 42 = 18$，$42^2 - 12 \cdot 156 = -108$ となっています。つまり，-3，18，-108，$\cdots$ が，公比 (-6) の等比数列になっているので，「2 つの等比数列の和の形」で表現することができる数列になっていそうだと判明する訳です。とにかく，以上の計算から，$x = 2$，$y = 6$ ですから，この数列の一般項を求める問題は，初期条件 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$ で，$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$ という漸化式から，一般項を求める問題に変更することができました。これから後の処理は，普通の漸化式の解法手順となります。まず，特性方程式 $t^2 - 2t - 6 = 0$ は，$(t-1)^2 = 7$ から，$t = 1 \pm \sqrt{7}$ と解けて，$\alpha = 1 + \sqrt{7}$，$\beta = 1 - \sqrt{7}$ とすれば，この数列の一般項が，$a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$ と置けますから，$a_1 = 1$ から $A + B = 1$ と，$a_2 = 3$ から $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 3$ より，$A = \dfrac{\sqrt{7}+2}{2\sqrt{7}}$，$B = \dfrac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{7}}$ と出て，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \dfrac{(\sqrt{7}+2)(1+\sqrt{7})^{n-1} + (\sqrt{7}-2)(1-\sqrt{7})^{n-1}}{2\sqrt{7}}$ となります。

2　一般項を求める問題（中級）

問題 2

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$8,\ 17,\ 50,\ 167,\ 572,\ 1949,\ \cdots$$

階差を取ってみると，9，33，117，405，1377，$\cdots$ となりますが，これでは，よくわからないので，次に，この数列は，2 つの等比数列の和の形になっていないかをチェックしてみましょう。

まず，$17^2 - 8 \cdot 50 = -111$，$50^2 - 17 \cdot 167 = -339$，$167^2 - 50 \cdot 572 = -711$ となり，比が一定になっていませんから，元の数列は，2 つの等比数列の和の形ではありません。

次に，階差数列の方で同じことをチェックしてみると，

$$33^2 - 9 \cdot 117 = 36,\ 117^2 - 33 \cdot 405 = 324,\ 405^2 - 117 \cdot 1377 = 2916$$

より，36，324，2916，$\cdots$ が公比 9 の等比数列になっているようなので，次のステップにいきましょう。

階差数列を $\{b_n\}$ として，$b_{n+2} = x \cdot b_{n+1} + y \cdot b_n$ と置けたとすると，

$$x = \frac{b_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot b_4}{(b_2)^2 - b_1 \cdot b_3} = 6,\ y = \frac{b_2 \cdot b_4 - (b_3)^2}{(b_2)^2 - b_1 \cdot b_3} = -9$$

となります。これで，$b_1 = 9$，$b_2 = 33$，$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n$ という漸化式の問題にすり替わります。これは，特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ から，$t = 3$(重解) となりますから，$b_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot n \cdot 3^{n-1}$ とおいて，$b_1 = 9$，$b_2 = 33$ から，$A + B = 9$ と $3A + 6B = 33$ となり，$A = 7$，$B = 2$ より，$b_n = (2n+7) \cdot 3^{n-1}$ となります。

この数列 $\{b_n\}$ は，2 つの等比数列の和の形ではないですが，同じような方法で求めること

ができたということです。このように，特性方程式が重解となる場合は，$B \cdot n \cdot 3^{n-1}$ というような数列が関係してきますが，全体的な解法としては，特に変更なしで処理することができます。これで，階差数列が $b_n = (2n+7) \cdot 3^{n-1}$ と求まったので，これの Σ を取れば，a_n が求まります。ただ，この Σ の計算も面倒です。それを避けるには，次のような処理方法があります。

階差数列 $\{b_n\}$ の形から，数列 $\{a_n\}$ は，$a_n = C \cdot 3^{n-1} + D \cdot n \cdot 3^{n-1} + E$ の形だと決まってしまうことが鍵です。つまり，n の多項式なら，それの Σ を取ると次数が 1 つ上がりますが，$(n \times \text{等比})$ の形は，Σ を取っても次数が上がらないということに注意すれば，a_n の形が推測できてしまうという訳です。

この $a_n = C \cdot 3^{n-1} + D \cdot n \cdot 3^{n-1} + E$ と置いた式から，階差を取って，

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (2C + 3D) \cdot 3^{n-1} + 2D \cdot n \cdot 3^{n-1}$$

となるので，$b_n = (2n+7) \cdot 3^{n-1}$ との係数を比較して，$C = 2$，$D = 1$ が求まります。これで，$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^{n-1} + E$ となります。最後に，$a_1 = 8$ から，$E = 5$ と決定するので，これで，$a_n = (n+2) \cdot 3^{n-1} + 5$ と求まりました。

この §1 と §2 でやったことから，$f(n)$ を多項式として，$a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1} + f(n)$ とか $a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot n \cdot \beta^{n-1} + f(n)$ のような式なら階差数列と組み合わせてなんとか一般項が出せるようになったということです。

$f(n)$ が多項式なら，第 2 階差，第 3 階差とやっていけば，次数が 1 つずつ下がりますから，そのうち 0 になります。だから，「$+f(n)$」という形がついていても大丈夫ということです。

高校の教科書において，階差数列で解ける問題は，$f(n)$ を多項式として，$a_n = f(n)$ とか $a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + f(n)$ の形に限定されていますから，求められるようになった数列の範囲が少しだけ拡張できたのかなと思います。このように一般項が簡単な式で表現可能ということは，統一的な視点からみれば，線形の漸化式が成立するかどうかに関係しているようです。そのあたりが，人間にとって扱いやすい数列の限界点なのかもしれません。

次に §3 では，数列の 2 倍角の公式なども紹介し，§1 でやったことと組み合わせて応用問題を解いてみたいと思います。

3　数列における 2 倍角の公式と 3 倍角の公式

問題 3

数列 $\{a_n\}$ が，下のような漸化式を満たすとき，次の問に答えよ。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_3 = 35,\ a_{n+3} = 4a_{n+2} + 5a_{n+1} + \frac{(a_{n+1})^2 - (a_n)^2 - 1}{a_n} \cdots (\text{ア})$$

① a_{2019} を 2 で割った余りを求めよ。

② a_{2016} を素因数分解したときの 2 の指数を求めよ。

③ a_{2997} を素因数分解したときの 3 の指数を求めよ。

④ a_{2916} を素因数分解したときの 3 の指数を求めよ。

この 4 項間の漸化式は，ちょっと解けそうにありません。というか，解けないようにわざ

と複雑に設定してみました。うまい変形を考えれば，この漸化式が直接解けるかもしれませんが，今は，その方向で考えるのはやめにして，§ 1 でやったことを応用してみましょう。まず，$n=1, 2, \cdots$ と代入して，第 6 項ぐらいまで求めておきましょう。実際に求めると，1，6，35，204，1189，6930，$\cdots$ となり，階差を取ってみると，5，29，169，985，5741，$\cdots$ となりますが，特徴がわかりません。次に，この数列は，「2 つの等比数列の和の形」になるかをチェックすると，$6^2-1\cdot 35=1$，$35^2-6\cdot 204=1$，$204^2-35\cdot 1189=1$ より，公比 1 の等比数列です。これで，$a_{n+2}=x\cdot a_{n+1}+y\cdot a_n$ と置いて，$x\cdot a_2+y\cdot a_1=a_3$ と $x\cdot a_3+y\cdot a_2=a_4$ から，$x=\dfrac{a_2\cdot a_3-a_1\cdot a_4}{(a_2)^2-a_1\cdot a_3}=6$，$y=\dfrac{a_2\cdot a_4-(a_3)^2}{(a_2)^2-a_1\cdot a_3}=-1$ となります。以上で，$a_1=1$，$a_2=6$，$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ という漸化式にすり替わりました。これは，特性方程式 $t^2-6t+1=0$ から，$(t-3)^2=8$ として，$t=3\pm 2\sqrt{2}$ となり，$\alpha=3+2\sqrt{2}$，$\beta=3-2\sqrt{2}$ とすれば，この数列の一般項が，$a_n=A\cdot\alpha^{n-1}+B\cdot\beta^{n-1}$ と置けますから，$a_1=1$ から $A+B=1$ と $a_2=6$ から $\alpha\cdot A+\beta\cdot B=6$ より，$A=\dfrac{\alpha}{4\sqrt{2}}$，$B=\dfrac{-\beta}{4\sqrt{2}}$ が出て，一般項は，$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}$ となります。

一般項や，漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ が出てしまえば，逆に，この漸化式を使って，問題 3 の漸化式 (ア) が成り立つことを示すのは簡単です (今は，証明を省略)。また，問題 3 の漸化式 (ア) から，a_4，a_5，$\cdots$ と順番に 1 つずつ確定していきますから，この漸化式を満たす数列も 1 つしかありません。だから，どんな方法で見つけたとしても，条件を満たす数列が 1 つ確定してしまうことにも注意を払ってください。

さて，① の解答ですが，漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ が出てしまえば，この漸化式を，$(\mathrm{mod}\ \ 2)$ で考えると $a_{n+2}\equiv a_n\ (\mathrm{mod}\ \ 2)$ ですから，$a_{2019}\equiv a_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ 2)$ つまり，a_{2019} を 2 で割った余りは，1 となります。

② の場合は，$(\mathrm{mod}\ \ 2)$ で考えるだけでは，不十分で，もう一工夫が必要です。いろいろなやり方があるのでしょうが，2 倍角の公式を作ってしまうのが一番楽な道だと思います。$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}$ より $a_{2n}=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^n+\beta^n)}{4\sqrt{2}}=a_n(\alpha^n+\beta^n)$ となります。

ここで，$\alpha^n-\beta^n=4\sqrt{2}\cdot a_n$ から，$\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=4\sqrt{2}\cdot a_{n+1}$ なので，
$\alpha^n-\beta^n=4\sqrt{2}\cdot a_n$ と $\alpha\cdot\alpha^n-\beta\cdot\beta^n=4\sqrt{2}\cdot a_{n+1}$ となり，これを，α^n と β^n の連立方程式と考えて解くと $\left(\alpha+\beta=6,\ \alpha-\beta=4\sqrt{2}\text{に注意}\right)$，$\alpha^n=a_{n+1}-\beta\cdot a_n$ と $\beta^n=a_{n+1}-\alpha\cdot a_n$ となります。これで，$(\alpha^n+\beta^n)=2a_{n+1}-(\alpha+\beta)a_n=2a_{n+1}-6a_n=2(a_{n+1}-3a_n)$ から，$a_{2n}=a_n(\alpha^n+\beta^n)=2a_n(a_{n+1}-3a_n)$ という式が得られました。この $a_{2n}=2a_n(a_{n+1}-3a_n)$ という式を，今は，この数列の 2 倍角の公式と呼びましょう。

ここで，① から，a_n が偶数なら，a_{n+1} は奇数で，a_n が奇数なら，a_{n+1} は偶数なので，いつでも $(a_{n+1}-3a_n)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ 2)$ となることに注意すると，$a_{2n}=2a_n(a_{n+1}-3a_n)$ という式から，a_n を素因数分解したときの 2 の指数が k なら，a_{2n} を素因数分解したときの 2 の指数は，$(k+1)$ となることがわかります。

$2016=2^5\times 63$ で，$a_{63}\equiv a_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \ 2)$ から出発すると，$a_{63\times 2}$ を素因数分解したといの 2 の指数は 1 となり，以下同様にやっていくと，$a_{2016}\equiv a_{63\times 32}$ を素因数分解したときの 2

の指数は，5 とわかります。

③ は，漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ から，$a_{n+2}\equiv -a_n \pmod{3}$ ですから，$\pmod{3}$ で，1，0，−1，0，1，0，−1，0，$\cdots$ と周期 4 で繰り返すことになります。$2997\equiv 97\equiv 1 \pmod{4}$ から $a_{2997}\equiv a_1\equiv 1 \pmod{3}$ つまり，a_{2997} は，3 で割り切れないので，a_{2997} を素因数分解したときの 3 の指数は，0 です。

④ の場合は，$\pmod{3}$ で考えるだけでは不十分で，これも，もう一工夫が必要です。今度は，3 倍角の公式を作ってしまうのが楽でしょう。

$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{4\sqrt{2}}$ より，$a_{3n}=\dfrac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{2n}+\alpha^n\beta^n+\beta^{2n})}{4\sqrt{2}}$ から，

$\alpha^n-\beta^n=4\sqrt{2}\cdot a_n$ と $\alpha\beta=1$ に注意しながら変形すれば，

$$a_{3n}=a_n\{(\alpha^n-\beta^n)^2+3(\alpha\beta)^n\}=a_n\{(4\sqrt{2}\cdot a_n)^2+3\cdot 1^n\}$$

つまり，$a_{3n}=a_n\{32\cdot(a_n)^2+3\}$ という 3 倍角の公式が得られます。

ここで，$a_n=3^k\times b$ (k は，1 以上の整数で，b は 3 と互いに素な整数) とすると，

$a_{3n}=3^k\times b\{32\cdot 3^{2k}\times b^2+3\}=3^{k+1}\times b\{32\cdot 3^{2k-1}\times b^2+1\}$ より，a_{3n} を素因数分解したときの 3 の指数は，$(k+1)$ となります。ただし，k が 0 のときは，a_{3n} を素因数分解したときの 3 の指数は，0 のままなので注意してください。

これで，$2916=3^6\times 4$ で，$a_4=204=3\times 68$ が，3 の 1 乗で割り切れることから出発し，$a_{4\times 3}$ を素因数分解したときの 3 の指数は，2 で，以下同様にやっていくと，$a_{2916}\equiv a_{4\times 729}$ を素因数分解したときの 3 の指数は，7 とわかります。

4　一般項を求める問題 (上級：分数になる場合の処理)

問題 4

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$2,\ 3,\ \frac{51}{13},\frac{33}{7},\frac{519}{97},\frac{321}{55},\cdots$$

この数列がどんな規則で作られているかを探してみようということなのですが，あまりにも自由度が高すぎると無理なので，今は，1 次分数変換の形の漸化式が成り立つときのみに限定して求めることにします。(分母と分子を分離して処理できれば，§1 と §2 でやったようにできるのではないかと思う方もいるかもしれませんが，それは，約分が絡んでくるのでなかなかうまくいきません。)

つまり，$a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$ というような漸化式が成り立つ場合のみ解いてみようということです。この 1 次分数変換の形は，複素平面を扱う場合によく出てきて，複比 (非調和比) が不変であることが有名です (この証明も省略)。今は，これを使って求めてみましょう。

a_1，a_2，a_3，x がそれぞれ，a_2，a_3，a_4，y に変換されたとすると，複比が不変であるから，$\dfrac{(a_1-a_3)(a_2-x)}{(a_2-a_3)(a_1-x)}=\dfrac{(a_2-a_4)(a_3-y)}{(a_3-a_4)(a_2-y)}\cdots$(イ) となります。複比を知らなくても (イ) の式で，$x=a_1$ を代入すると，$y=a_2$ となることなどは，すぐ確認できます。これを，$y=\cdots$ の形にすれば，求めたい漸化式が得られます。$k=\dfrac{(a_3-a_4)(a_1-a_3)}{(a_2-a_4)(a_2-a_3)}$ と置けば，

$\dfrac{(y-a_3)}{(y-a_2)} = \dfrac{k\,(x-a_2)}{(x-a_1)}$ より，$y = \dfrac{(ka_2-a_3)\,x+\{a_1a_3-k\,(a_2)^2\}}{(k-1)\,x+(a_1-ka_2)}$ となります。今，この公式を使って，実際に問題 4 の数値を代入してみると，$y = \dfrac{27x+21}{x+23}$ なので，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{27a_n+21}{a_n+23}$ という分数型の漸化式を解く問題にすり替わりました。この漸化式で実際に大丈夫かどうかは，$n = 1, 2, \cdots$ と代入してみれば，問題 4 の数列が出てくるのでうまくいっていると確認できます。

この分数型の漸化式を解くには，$\alpha - \omega$ 第 56 号 の「分数型の漸化式の新しい視点からの解法」でやった方法が楽です。

$a_{n+1} = \dfrac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$ とあったら，$b_{n+1} = a\cdot b_n + b\cdot c_n$，$c_{n+1} = c\cdot b_n + d\cdot c_n$ で c_n を消去すると基本公式 $b_{n+2}-(a+d)\,b_{n+1}+(ad-bc)\,b_n = 0$ となります。$(a+d)$ とか $(ad-bc)$ という，行列のケーリー・ハミルトンの定理と同じ式が出てきます。

まず，$a_1 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{b_1}{c_1}$ から，$b_1 = 2$，$c_1 = 1$ と置きます。次に，$b_2 = 27\cdot b_1 + 21\cdot c_1 = 75$，$c_2 = 1\cdot b_1 + 23\cdot c_1 = 25$ を求め，基本公式から，$27+23 = 50$，$27\times 23 - 21\times 1 = 600$ の値も必要で，これで，$t^2-50t+600 = 0$ を解くことになり，$t = 20, 30$ となるので，b_n なら，$b_{n+2}-50b_{n+1}+600b_n = 0$，$b_1 = 2$，$b_2 = 75$ を解くこととなり，$b_n = A\cdot 20^{n-1}+B\cdot 30^{n-1}$ と置いて，$b_1 = 2$，$B_2 = 75$ から，$A+B = 2$ と $20A+30B = 75$ となり，$A = -1.5$，$B = 3.5$ が出ますから，$b_n = (-1.5)\cdot 20^{n-1}+(3.5)\cdot 30^{n-1}$ と解けます。

c_n も同様に，$c_{n+2}-50c_{n+1}+60c_n = 0$，$c_1 = 1$，$c_2 = 25$ を解くこととなり，$c_n = C\cdot 20^{n-1}+D\cdot 30^{n-1}$ と置いて，$c_1 = 1$，$c_2 = 25$ から，$C+D = 1$ と $20C+30D = 25$ となり，$C = 0.5$，$D = 0.5$ が出ますから，$c_n = (0.5)\cdot 20^{n-1}+(0.5)\cdot 30^{n-1}$ です。これから，a_n の式に代入すると

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{(-1.5)\cdot 20^{n-1}+(3.5)\cdot 30^{n-1}}{(0.5)\cdot 20^{n-1}+(0.5)\cdot 30^{n-1}} = \frac{7\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}+2^{n-1}}$$

と，やっと一般項が求まりました。実際に代入してみると，ちゃんと，「2, 3, $\cdots$」と問題 4 の数列と一致しています。

(参考文献)

1. 宮原繁，「モノグラフ 15．漸化式」，(科学新興社)，1988 年発行
2. 栗田哲也，月刊誌「大学への数学」，(東京出版)，2015 年 7 月号の数列の周辺（4）
3. 西川誠，「分数型の漸化式の新しい視点からの解法」，2018 年 $\alpha - \omega$ 第 56 号