一次不定方程式の特殊解の算出法に関して

八千代東高等学校　新保 和夫

1　はじめに

三十有余年の教員生活の中で，昨年度は数学 A を担当し「ユークリッドの互除法」を用いる一次不定方程式の解法を初めて指導しました。現行課程以前では整式の整除による，いわゆる約数，倍数の関係を利用しての解法が主流だったと思います。正直に言って中高校生のときに互除法を用いて 2 整数の最大公約数や 2 整式の最大公約数が「ユークリッドの互除法」で求められることは知っていましたが，実際に求めた経験は今回が初めてで，授業としての（生徒側の）評価はともかく新鮮な気分で実践できました。教壇に立つことも残り僅かとなり，備忘録として著しましたが何かの参考になれば望外の喜びです。

【問題】 方程式 $11x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

解答 y について解くと

$$y=\frac{1-11x}{5}=\frac{1-(5\cdot 2+1)x}{5}$$
$$=-2x+\frac{1-x}{5}\quad\cdots ①$$

①において y と $-2x$ は整数であることから $\dfrac{1-x}{5}$ も整数，即ち，$1-x$ は 5 で割り切れる。
よって，k を整数として，

$$1-x=5k$$
$$\therefore x=-5k+1$$

とおける。このとき，①から

$$y=-2(-5k+1)+k=11k-2$$

以上により，求める整数解は
$x=-5k+1, y=11k-2$（k は整数） □

一次不定方程式に限らず整数解を求めさせる問題（いわゆる整数方程式やより広範には整数問題）は単純に二次方程式や二元，三元の連立方程式のように過程式をずらずらと書き並べれば十分と言うわけではなく何らかの論証部の記述を要求し，ある意味そこに力点を置いて指導するのが一般だと思います。それだけに解答の言語化が苦手であったり，煩わしさを感じる生徒にとっては鬼門の教材の一つなのでしょう。

さて，先の解法のポイントは約数（倍数）という親しみ易い性質をうまく使うことなのでその点ではわかり易い解答でしょう。一方，多くの生徒にとっての万能薬ではなく，もう一つの難所を抱えていることがわかります。

【問題】 方程式 $17x-13y=1\cdots①$ の整数解をすべて求めよ。

y について解くと

$$y=\frac{-1+17x}{13}=\frac{-1+(13+4)x}{13}$$
$$=x+\frac{-1+4x}{13}$$

この変形は前問と同様なので多くの演習時間を割くことなく比較的容易に習熟は可能でしょう。この式変形から，$-1+4x$ が 13 の倍数であることがわかり，$-1+4x=13k$（k は整数）などとおけるのですが残念なことにこれは前問と異なり，x に対する一般解表示が得られず，結果としてすべての整数解を直

ちに得ることができません。これを回避するために次のような式変形を行う方法があります。与えられた方程式を

$$\begin{aligned}(13+4)x-13y&=1\\ 13(x-y)+4x&=1 \quad \cdots②'\end{aligned}$$

と変形したうえで，例えば $x-y=s$ とでもおき x について解けば

$$x=\frac{1-13s}{4} \quad \cdots②$$

前問同様に ② は x，s について解くことができ，結果として ① の整数解を得ることができます。しかし，②$'$ 式への変形はかなり技巧的な印象を受け，また，② の段階でもなお一般解表示を得ることができない場合にはさらなる変形を繰り返すことになります。このように，本解法は場合によっては込み入った計算が要求される手法でもあり，数学を苦手科目と意識する生徒にとってはかなりハードルが高いことがわかります。

お気づきとは思いますが，この式変形は「ユークリッドの互除法」と同種のアルゴリズムが利用されています。対して「互除法」を活用した一次不定方程式の解法とは，ごちゃごちゃとした式変形の羅列を（一足飛びに）避けて一般解を得るための便法だと理解しています。

前置きがながくなりましたが，本論に入りましょう。

2 ユークリッドの互除算法の留意点

次の例は数研出版，新編数学 A からの引用です。

$\boxed{\text{例}}$ 等式 $24x+17y=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求める。

24 と 17 に互除法の計算を行う。

$24=17\cdot1+7$ 移項すると $7=24-17\cdot1$

$17=7\cdot2+3$ 移項すると $3=17-7\cdot2$

$7=3\cdot2+1$ 移項すると $1=7-3\cdot2$

よって

$$\begin{aligned}1&=7-3\cdot2\\ &=7-(17-7\cdot2)\cdot2\\ &=7\cdot5+17\cdot(-2) && (1)\\ &=(24-17\cdot1)\cdot5+17\cdot(-2)\\ &=24\cdot5+17\cdot(-7) && (2)\end{aligned}$$

すなわち $24\cdot5+17\cdot(-7)=1$

従って，求める整数 x，y の組の 1 つは

$$x=5,\ y=-7 \quad \square$$

この記述を読んで「わかりづらいなぁ」というのが第一印象でした。理由は (1) 式での第一項は $7\cdot5$ になっている点です。これは直前式の項の並びにそろえているためだと推測されます。しかし，直前式からの変形ではまず 17×2（さらに $\times(-1)$）を考え，次にカッコ内の第二項との分配乗積を行い，第一項 7 との整理を行うのが自然な順序であると思うからです。実際，(2) 式ではそのような順序で実行されていると解釈できます。この例では代入，展開，整理の一連の手順が二回で済んでいますが，さらに回数が多い場合にはますます，ごちゃごちゃするのではないでしょうか。

実際の授業では

$$\begin{aligned}1&=7-3\cdot2 && ①\\ &=7-(17-7\cdot2)\cdot2 && ②\\ &=17\cdot(-2)+7\cdot5 && ③\\ &=17\cdot(-2)+(24-17\cdot1)\cdot5\\ &=24\cdot5+17\cdot(-7)\end{aligned}$$

の順に板書し，次のような点を強調してみました。

① 式から，代入，展開，整理の計算を繰り返すよ，と予告。

② カッコ部の展開は普通に分配法則使うよ。（最初の分配は問題ないが，次の分配では第一項との整理が必要であり，暗算ミスが誘発される個所です。ここが指導の急所でしょう。）

なお，次に代入を要する項は常に右側に配置されることになりますが，

③ 左側に配置される項を書いたら必ずすぐに「＋」を書けと強調します（展開後の式を

$$\bigcirc \cdot \triangle + \bullet \cdot (\text{同類項を整理した係数})$$

の形に統一させるためです）。

後は繰り返しの計算を実行するだけです。ここまで丁寧に説明すれば習得，習熟は期待できそうなのですが，実際のところ一回の口頭説明で理解するには「これが公式だー！とにかく覚えろー！」とは異なり，やはり難しいのが実状です（そもそも話を聞いていない）。③ 式以降では第一項と第二項の間は ＋ としましたが ① 式の段階から $7+3\cdot(-2)$ とする方が望ましいのかもしれません（② の展開で－の掛け忘れミスをする生徒も多いので）。その意味で，この例題の解説時にはともかく，最初の練習問題での模範解答時に言及してもよいでしょう。

3 互除剰余の公式

整数 a と非負整数 b について

$$a = bq + r (0 \leqq r < b)$$

を満たす整数 q，r が一意に定まる，という性質は除法の原理（整除の原理，割り算の原理）と呼ばれています。これから得られる $r = a - bq$ を剰余の公式（余りの公式）と呼ぶこともあります。

ユークリッドの互除法を利用して一次不定方程式 $ax+by=1$(a, b は互いに素な整数)の特殊解 (x_0, y_0) を求める，即ち $ax_0+by_0=1$ を満たす整数 x_0，y_0 を求めるとき，上式の右辺の 1 は互除法における逐次除算を行った最後の余りに該当することがわかります。つまり，互除法における（最終の）余りを被除数 a，除数 b を用いて表すという互除法版の剰余の公式と見ることもできます。

以降では $a \geqq b$ を暗黙に仮定します。

【問題】 不定方程式 $104x+31y=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ見つけよ。

最初は互除法を利用してみることにします。

（手順１）互除法の筆算

$$\begin{array}{cccccc}
 & & ① & ② & ③ & ④ \\
 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\
1\big) & 2\big) & 9\big) & 11\big) & 31\big) & 104 \\
 & 2 & 8 & 9 & 22 & 93 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 9 & 11
\end{array}$$

（手順２）余り ＝ の式を作る。

① $1 = 9 - 2 \times 4$

② $2 = 11 - 9 \times 1$

③ $9 = 31 - 11 \times 2$

④ $11 = 104 - 31 \times 3$

（手順３）代入，展開，整理（係数に着目）

$$\begin{array}{lll}
① & 1 = 9 \times \boxed{1} + 2 \times (\boxed{-4}) & (1, \boxed{-4}) \\
 & \quad = 9 \times 1 + (11 - 9 \times 1) \times (-4) & \\
② & \quad = 11 \times (-4) + 9 \times \boxed{5} & (-4, \boxed{5}) \\
 & \quad = 11 \times (-4) + (31 - 11 \times 2) \times 5 & \\
③ & \quad = 31 \times 5 + 11 \times (\boxed{-14}) & (5, \boxed{-14}) \\
 & \quad = 31 \times 5 + (104 - 31 \times 3) \times (-14) & \\
④ & \quad = 104 \times (-14) + 31 \times \boxed{47} & (-14, \boxed{47})
\end{array}$$

これから，特殊解の一組 $(x, y) = (-14, 47)$ が得られます。

上の（手順３）では前節の ③ に従って，① 式を $1 = 9 - 2 \times 4$ ではなく $1 = 9 + 2 \times (-4)$ に変えてあります。

この計算の仕組みを調べるために各途中段階での係数の変化に着目してみましょう。

まず，左側の係数に注目してみます。

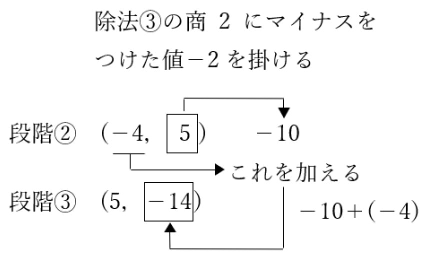
①式段階での左側の係数は必ず 1 であることがわかります。また，次の段階での左側の係数は直前の式の右側と必ず同じものになっていることも直ちにわかります。

次に，右側の係数の変化の仕組みを調べてみましょう。ここでは③段階での係数について調べてみます。

この係数 -14 は

$$\begin{aligned}
&11\times(-4)+(31-11\times 2)\times\boxed{5}\\
&=11\times(-4)+\{31+11\times(-2)\}\times\boxed{5}\\
&=31\times 5+\{11\times(-4)+11\times(-2)\times\boxed{5}\}\\
&=31\times 5+11\times\{(-4)+(-2)\times\boxed{5}\}\\
&=31\times 5+11\times(-14)
\end{aligned}$$

の過程を経て得られるのですが，$\boxed{5}$は一つ前の段階②での右側の係数です。-2 は互除法の逐次除算での③に該当する除算での商にマイナスをつけた値であることがわかります。-4 は$\boxed{5}$と同様に一つ前の段階②の左側の係数



です。

これは他の段階の係数でも同様な関係が成り立っていることは容易にわかります。

従って，この関係式（漸化式）に基づけば各段階での係数を効率的に高速計算することが可能で，算法的には次のような図式を利用するとよいでしょう。

まず,（手順 1 ）の互除法の筆算を行って商の列 4,1,2,3 をあらかじめ確認しておきます。

次のような図式を書きます。

$$\begin{array}{c|ccc} ① & & & \\ & ② & ③ & ④ \\ \hline & & & \end{array}$$

①，②，③，④には（手順 1）で確認した商をマイナスに変えた値を記入します。上段最左端には 1 を追加します。

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & -4 & & & \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & & & & \end{array}$$

（この筆算方法では余りは使いません。）

次に，斜めの位置にある①と②を掛けた数を②の下に記入し，①の左隣にある数を加えて①の右隣に書き入れます。

$$\begin{array}{cc|ccc} \cancel{1} & -4 & 5 & & \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & & 4 & & \end{array}$$

以下同様に上段の数に対し右斜め下にある数を掛けて記入し，左隣の数を加えて右隣に書き加える操作を繰り返します。

$$\begin{array}{cc|ccc} \cancel{1} & \cancel{-4} & 5 & -14 & \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & & 4 & -10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} \cancel{1} & \cancel{-4} & \cancel{5} & -14 & 47 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & & 4 & -10 & 42 \end{array}$$

図式を完成させれば特殊解

$$x=-14,\ y=47$$

が得られます。この算法は教科書の標準的な式変形を筆算形式に直しているだけなので特別な意義はありません。整式の除法でも同様に「負の数を引く」の暗算を苦手とする生徒は多く,「組み立て除法」のように除数側の符号をあらかじめ反転させておいて「正の数（あるいは負の数）の足し算」に直せばミスは減るよね，の類です。数学教育としては単に算法を覚えてもらっても意味はなく，やはりユークリッドの互除法の原理とその活用としての式変形を実行する能力（分析力・計算力）を身に付けて欲しいものです。一方，余力の

ある生徒向けの発展課題や研究授業向けの題材として一考の価値はあるかもしれません。

また，当然と言えば当然なのですが互除法での逐次除算で出現する他の余りも被除数，除数 a，b で表すことができ，それらも同様に算出できることは明らかです。その意味でこの筆算を互除剰余の公式（互除剰余の算法）と呼んでよいと個人的にはそう思っています。

4　練習問題

【問題】 不定方程式 $57x + 44y = 5$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

（模範解答はこの小文の最後に掲載します。）

5　合同式による解法は最強の解法？

多くの教科書では，合同式は発展課題として位置づけられているか，直接的な記法，語法を用いないが，べき乗の剰余を求める形で軽く取り扱うというのが主な構成だと思います。

ユークリッドの互除法を利用した解法を指導したうえで，さらに合同式を利用した解法を解説することはまれでしょう。一方，これは教科教育的にはよく知られた技法で特段留意すべきことはないのですがこの「合同式を利用した解法」に対する私見を述べてみたいと思います。

この節では不定方程式 $ax + by = c$ に対して暗黙の仮定 $a \geqq b$ は課さないとします。

【問題】 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$$-26x + 7y = 13$$

7 を法とした合同式を考えてみます。与えられた方程式から

$$-26x \equiv 13 \pmod 7 \quad \cdots ①$$

$-26x + 7y \equiv 13 \pmod 7$ ですが $7y \equiv 0 \pmod 7$ は自明なので。さらには $-26 \equiv -5 \equiv 2 \pmod 7$，$13 \equiv 6 \pmod 7$ だから $-26x \equiv 6 \pmod 7$，$-5x \equiv 6 \pmod 7$，$2x \equiv 6 \pmod 7$ などの方が計算は楽になりますが，ここでは説明のため，あえて変形しません。

①は合同方程式と呼ばれるもので，合同式の諸性質を用いて

$$x \equiv \square \pmod 7 \ (-x \equiv \square \pmod 7)$$

の形に変形する，いわゆる「解く」ことで特殊解の x の値を一つ求めることができます。最も考えやすい手順は「一次連立方程式の加減法のノリ」で計算する方法でしょう。

$$7x \equiv 0 \pmod 7 \quad \cdots ②$$

$7x \equiv 0 \pmod 7$ は自明なので，連立させるもう一本の式とこれを採用します。

① + ② × 4 より

$$2x \equiv 13 \pmod 7 \quad \cdots ③$$

② − ③ × 3 より

$$x \equiv -39 \pmod 7 \quad \cdots ④$$

④から特殊解の x の値の 1 つとして $x = -39$ が得られるので，これを与えられた方程式に代入し

$$-26 \cdot (-39) + 7y = 13$$
$$\therefore y = -143$$

以上から特殊解の 1 つとして

$$x = -39,\ y = -143$$

を得ることができました。

さて，よくよく考えてみれば上記の手順は -26 と 7 の 2 数に対して互除法を適用していることと同じで，26 と 7 が互いに素であることから必ず係数を 1 に還元できることが保証されています。その意味ではユークリッドの互除法を利用する方法と本質的には同じです。しかし，「負の数を割る」「負の数で割る」という負の数に関する整除はなじみがないだけにややもすると単純ミスが誘発される個所です。実際，不定方程式

$$ax + by = c \quad (3)$$

で互除法を用いる場合，a，b のいずれかが負であるときは

$$|a|x + |b|y = 1 \quad (4)$$

を想定し，適用後に符号を調整するという手順を踏ませるのが通例です。また，$a < b$ であっても (4) に直しますが，本小文では $a \geqq b$ を仮定したので特に本小文での簡便法を用いる場合も含めて，最終の係数の並びを逆順に解釈する必要があるなど，この辺のちょっとした事柄を口頭で伝えることは以心伝心とはゆかず，歯痒い思いたびたびです。

一方，合同式を利用する場合は係数の絶対値を逐次小さくし，最終的に 1（あるいは -1）とすればよいわけで必ずしも整除の余りに置き換える必要はありません。適当な 2 式を選んで適当な加減を行えばよいという発想の自由度があります。実際，①の両辺に -1 を掛けて

$$26x \equiv -13 \pmod 7 \cdots ①'$$
$$7x \equiv 0 \pmod 7 \cdots ②$$

①$'$ − ② × 3 より

$$5x \equiv -13 \pmod 7 \cdot\cdot ③$$

①$'$ − ③ × 5 より

$$x \equiv 52 \pmod 7 \cdots ④'$$

としてもよいわけです。

$\boxed{\text{注}}$ ④でも④' でも $-39 \equiv 52 \equiv 3 \pmod 7$ なので必要があれば最終的には $x = 3$ $(x = -4)$ を採用することも容易です。

a，b の大小や正負に関わらず議論できる，つまり法としては a でも b でも好きな方を選べます。さらには，特殊解を求めるという方針でしたが例えば④から直ちに $x = 7k - 39$(k は整数) とおけ，与えられた方程式に代入して

$$\begin{aligned}
-26(7k-39) + 7y &= 13 \\
-26 \cdot 7k + 1014 + 7y &= 13 \\
7y &= 26 \cdot 7k + 13 - 1014 \\
7y &= 26 \cdot 7k - 1001 \\
\therefore y &= 26k - 143
\end{aligned}$$

を得ることができます。つまり特殊解 $x_0 = -39$，$y_0 = -134$ を経ずに言い換えれば特殊解の明示もせず「26 と 7 は互いに素だから」の（表立った）言明を避けて解答できる利点があります。さらに言えば，(3) において $c \neq 1$ であっても (4) を経由することなく直接計算できる点も利点と言えます。

6　拡張に関して

以上，あれこれと調べた結果に過ぎませんが本稿の内容に関連して Wikipedia によると三変数以上の不定方程式でも変数の置き換えにより，二変数の場合に帰着できるとの記載があります。具体的に特殊なケースでの解法は理解できるのですが一般的な原理や法則は未だに理解しきれておらず情けないのが現状です。合同式の観点からすっきりとした解法やその説明をご存知の方がいらっしゃいましたらご一報くださると幸いです。

今年度はコロナ禍という歴史的事件から全国的に休校となる未曾有の体験から始まりした。生徒にとっては災難なわけですが私個人にとっては本稿で話題にした教材だけではなく，普段では余裕をもって取り組めない多くの事柄について教材研究する機会が得られました。これが二学期以降に活かせればと思っています。