述語論理の指導教材
ー発見する数学を目指してー

千葉県立磯辺高等学校・氏家悟

１．はじめに
論理は数学Ⅰの単元だけではなく，あらゆる場面で指導する機会があると考えている。数学Ⅲでは，場面によっては述語論理(すべて・ある)を用いたい場面もあり，昨年度の数学Ⅲの授業では数学Ⅰの命題論理の復習と，それに続いて述語論理の導入の授業を行った。

２．命題論理
(1) 反例
数学Ⅰで学んだ，「かつ」「または」「否定」はド・モルガンの法則を確かめる例で復習し，必要・十分も簡単な例で行った。必要・十分は真偽の見極めが重要になる，とくに偽については，「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」の反例が「p かつ$\overline{\mathrm{q}}$」であることに注意させたい。対偶や背理法を用いた証明では，否定の作り方が重要になるからである。

(2)「ならば」の真偽
「ならば」の否定を説明するには真理値表が便利なため，「かつ」「または」「否定」の組み合わせで真理値表の演習をした。実はそのクラスは，２年生の「情報」でも扱ったのでその復習でもあった。

数学 Ⅰ での「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」の真偽は，p，q は条件であって，それだけで真偽が決まらず，条件の範囲の包含関係で考えるものではあるが[1]，p，q が単独で真偽が決まっていると考える(pかつq などの真偽も同様)。天下りに教えてしまってもいいが，「腑に落ちる」ようにしたいからである。次のことを，例を示しつつ導入した。

・q が真のときは，p の真偽にかかわらず「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」は真。

・p も q も，ともに偽のときは，仮定と結論の真理値が一致するので，「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」は真。

・p が真で q が偽のときだけ「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」は偽。

これをもとに真理値表を作れば，よく見る「天下り」な表になるのである。そして，「かつ」「または」「否定」の真理値表から同じものを探させると，「ならば」の否定につながるのである。

(3) 対偶と背理法
数学Ⅰの背理法は，「命題が成り立たないと仮定して矛盾を導く」として，「$\sqrt{2}$が無理数であることを用いて，$1+\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ」という例題があり，「$1+\sqrt{2}$ が無理数でない」と仮定して矛盾を導いている。この例では，「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」の否定が「$\mathrm{p} \Rightarrow \overline{\mathrm{q}}$」と勘違いする生徒が多くなる。

「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」の否定「$\overline{\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}}$」は，反例と同じ「p かつ$\overline{\mathrm{q}}$」なのである。それは，「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」と同じ真理値表になるのは「$\overline{\mathrm{p}}$またはq」で，その否定からド・モルガンの法則でわかる。そして，条件の包含関係で真になる「$\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$」と同値な「$\overline{\mathrm{p}}$またはq」の Venn 図は全体集合，偽では空集合になることが確かめられる。

「$1+\sqrt{2}$ が無理数でない」との背理法の仮定は，正確には「$\sqrt{2}$が無理数，かつ，$1+\sqrt{2}$ が無理数でない」なのである。

３．述語論理につなげる
「$x>0 \Rightarrow x>3$」は包含関係から偽である。偽の命題の否定は真なので，否定「$x>0$ かつ $x \leq 3$」は真のはずであるが，全体集合にならない。さらに偽「$x>0 \Rightarrow x>3$」と同値な「$x \leq 0$ または$x>3$」も空集合ではない。

プリントでは，それに「すべてのx」，「あるx」を補って，真偽が正しくなるように，量化子（すべて・ある）を導入した。

実は，真の命題「$x>3 \Rightarrow x>0$」は，「すべてのx」について，成り立つことが「ならば」の真理値表からも確かめられる。この命題において，$x=-13$ を考えることは普通ないが，$x=-13$ のとき，「$x>3 \Rightarrow x>0$」は真である。

偽の命題「$x>0 \Rightarrow x>3$」についても，「すべてのx」について成り立たないことから偽であり，反例「ある$x=2$について，$x>0 \Rightarrow x>3$でない」は真である。つまり量化子のない命題は，「すべて」が略されていると考えるのである。

量化子の省略は，方程式，不等式，恒等式といったことにつながる。

参考文献
[1]本橋信義，「２つの“ならば”」，数学セミナー，2019 年 8 月