

平成31年度 センター試験 (本試 平成31年1月20日実施)

数学I・数学A (60分, 100点)

第1問 (必答問題)(配点30)

〔1〕 a を実数とする。

$$9a^2 - 6a + 1 = \left(\boxed{\text{ア}} a - \boxed{\text{イ}} \right)^2 \text{である。次に } A = \sqrt{9a^2 - 6a + 1} + |a + 2|$$

$$\text{とおくと } A = \sqrt{\left(\boxed{\text{ア}} a - \boxed{\text{イ}} \right)^2} + |a + 2| \text{である。}$$

次の三つの場合に分けて考える。

$$\cdot a > \frac{1}{3} \text{ のとき, } A = \boxed{\text{ウ}} a + \boxed{\text{エ}} \text{ である。}$$

$$\cdot -2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき, } A = \boxed{\text{オカ}} a + \boxed{\text{キ}} \text{ である。}$$

$$\cdot a < -2 \text{ のとき, } A = -\boxed{\text{ウ}} a - \boxed{\text{エ}} \text{ である。}$$

$$A = 2a + 13 \text{ となる } a \text{ の値は } \boxed{\text{ク}}, \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} \text{ である。}$$

〔2〕 二つの自然数 m, n に関する三つの条件 p, q, r を次のように定める。

$$p: m \text{ と } n \text{ はともに奇数である} \quad q: 3mn \text{ は奇数である} \quad r: m + 5n \text{ は偶数である}$$

また、条件 p の否定を \bar{p} で表す。〔1〕 次の $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを、下の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。二つの自然数 m, n が条件 \bar{p} を満たすとする。このとき、 m が奇数ならば n は $\boxed{\text{シ}}$ 。また、 m が偶数ならば n は $\boxed{\text{ス}}$ 。

① 偶数である

② 奇数である

③ 偶数でも奇数でもよい

〔2〕 次の $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを、下の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。 p は q であるための $\boxed{\text{セ}}$ 。 p は r であるための $\boxed{\text{ソ}}$ 。 \bar{p} は r であるための $\boxed{\text{タ}}$ 。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが、十分条件ではない

③ 十分条件であるが、必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

[3] a と b はともに正の実数とする。 x の 2 次関数 $y = x^2 + (2a - b)x + a^2 + 1$ のグラフを G とする。

(1) グラフ G の頂点の座標は $\left(\frac{b}{\text{チ}} - a, -\frac{b^2}{\text{ツ}} + ab + \text{テ} \right)$ である。

(2) グラフ G が点 $(-1, 6)$ を通るとき、 b のとり得る値の最大値は ト であり、そのときの a の値は ナ である。

$b = \text{ト}$, $a = \text{ナ}$ のとき、グラフ G は 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$, y 軸方向に $\frac{\text{ネノ}}{\text{ハ}}$ だけ平行移動したものである。

第 2 問 (必答問題)(配点 30)

[1] $\triangle ABC$ において、 $AB=3$, $BC=4$, $AC=2$ とする。次の エ には、下の ① ~ ② のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\cos \angle BAC = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ であり、 $\angle BAC$ は エ である。

また、 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$ である。

① 鋭角

② 直角

③ 鈍角

線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。 $\cos \angle CAD = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ であるから、 $AD = \text{コ}$ であり、 $\triangle DBC$ の面積は $\frac{\text{サ} \sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$ である。

[2] 全国各地の気象台が観測した「ソメイヨシノ (桜の種類) の開花日」や、「モンシロチョウの初見日 (初めて観測した日)」, 「ツバメの初見日」などの日付を気象庁が発表している。気象庁発表の日付は普通の月日形式であるが、この問題では該当する年の 1 月 1 日を「1」とし、12 月 31 日を「365」(うるう年の場合は「366」)とする「年間通し日」に変更している。例えば、2 月 3 日は、1 月 31 日の「31」に 2 月 3 日の 3 を加えた「34」となる。

(1) 図 1 は全国 48 地点で観測しているソメイヨシノの 2012 年から 2017 年までの 6 年間の開花日を、年ごとに箱ひげ図にして並べたものである。

図 2 はソメイヨシノの開花日の年ごとのヒストグラムである。ただし、順番は年の順に並んでいるとは限らない。なお、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

次の ソ , タ に当てはまるものを、図 2 の ① ~ ⑤ のうちから一つずつ選べ。

・ 2013 年のヒストグラムは ソ である。

・ 2017 年のヒストグラムは タ である。

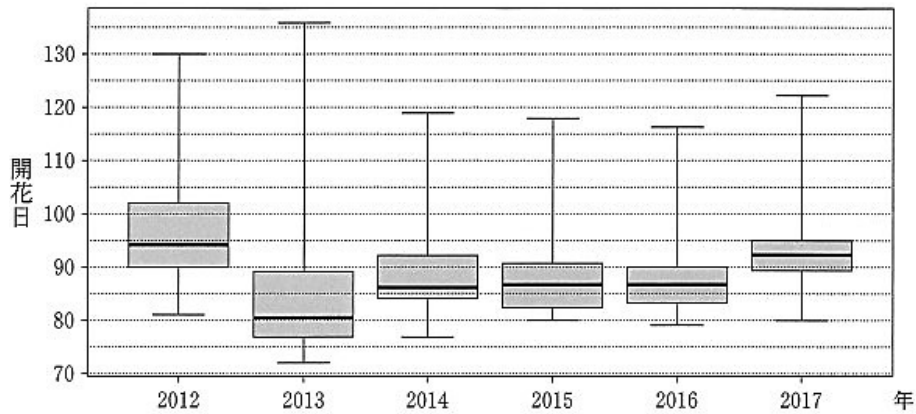


図1 ソメイヨシノの開花日の年別の箱ひげ図

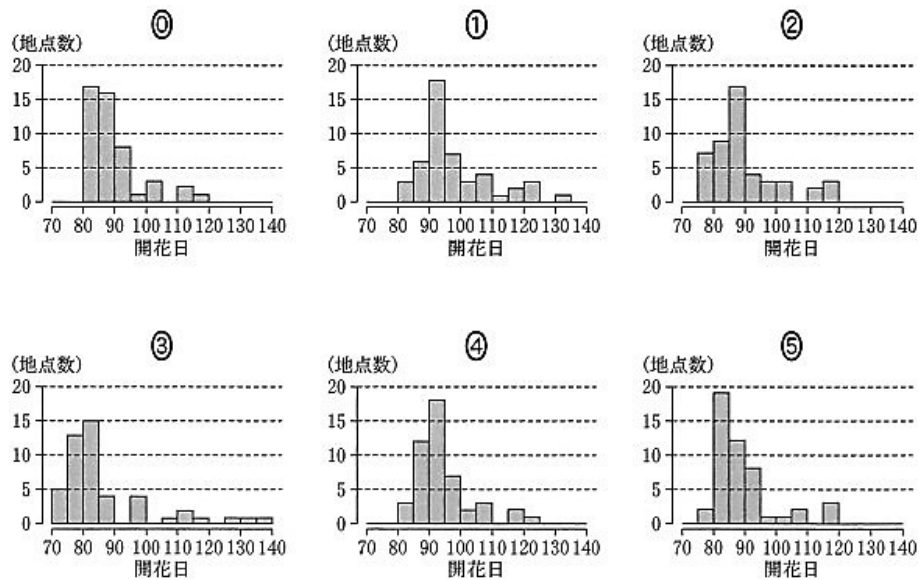


図2 ソメイヨシノの開花日の年別のヒストグラム

(出典：図1，図2は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成)

(2) 図3と図4は、モンシロチョウとツバメの両方を観測している41地点における、2017年の初見日の箱ひげ図と散布図である。散布図の点には重なった点が2点ある。なお、散布図には原点を通り傾き1の直線(実線)、切片が-15および15で傾きが1の2本の直線(破線)を付加している。

次の , に当てはまるものを、下の①~⑦のうちから一つずつ選べ。ただし、解答の順序は問わない。

図3，図4から読み取れることとして正しくないものは、 , である。

- ⑥ モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。
- ⑦ モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。
- ⑧ モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。
- ⑨ モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の3倍より小さい。
- ⑩ モンシロチョウの初見日の四分位範囲は15日以下である。
- ⑪ ツバメの初見日の四分位範囲は15日以下である。
- ⑫ モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所が少なくとも4地点ある。
- ⑬ 同一地点でのモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差は15日以下である。

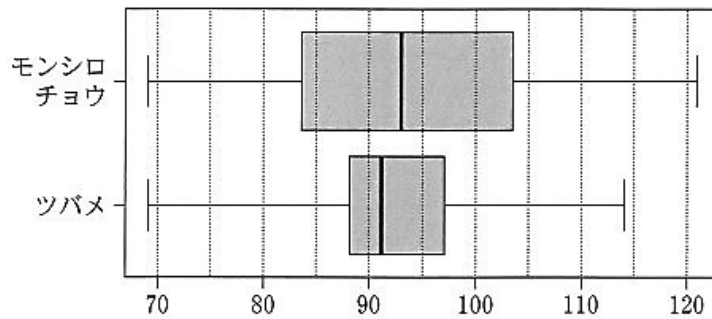


図3 モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の箱ひげ図

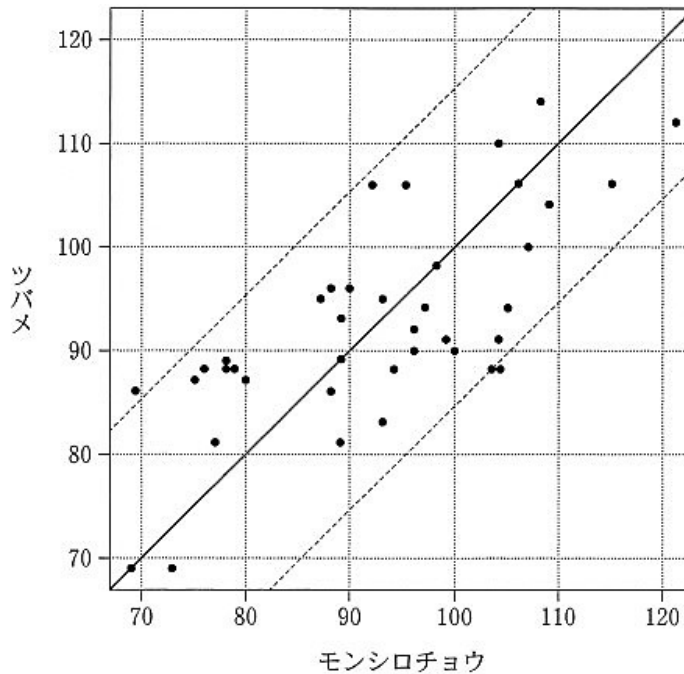


図4 モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の散布図

(出典：図3，図4は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成)

(3) 一般に n 個の数値 x_1, x_2, \dots, x_n からなるデータ X の平均値を \bar{x} , 分散を s^2 , 標準偏差を s とする。各 x_i に対して $x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) と変換した x'_1, x'_2, \dots, x'_n をデータ X' とする。ただし, $n \geq 2, s > 0$ とする。

次の , , に当てはまるものを, 下の①~⑧のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

• X の偏差 $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$ の平均値は である。

• X' の平均値は である。

• X' の標準偏差は である。

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ \bar{x} ⑤ s
 ⑥ $\frac{1}{s}$ ⑦ s^2 ⑧ $\frac{1}{s^2}$ ⑨ $\frac{\bar{x}}{s}$

図4で示されたモンシロチョウの初見日のデータ M とツバメの初見日のデータ T について上の変換を行ったデータをそれぞれ M', T' とする。

次の に当てはまるものを, 図5の①~④のうちから一つ選べ。

変換後のモンシロチョウの初見日のデータ M' と変換後のツバメの初見日のデータ T' の散布図は, M' と T' の標準偏差の値を考慮すると である。

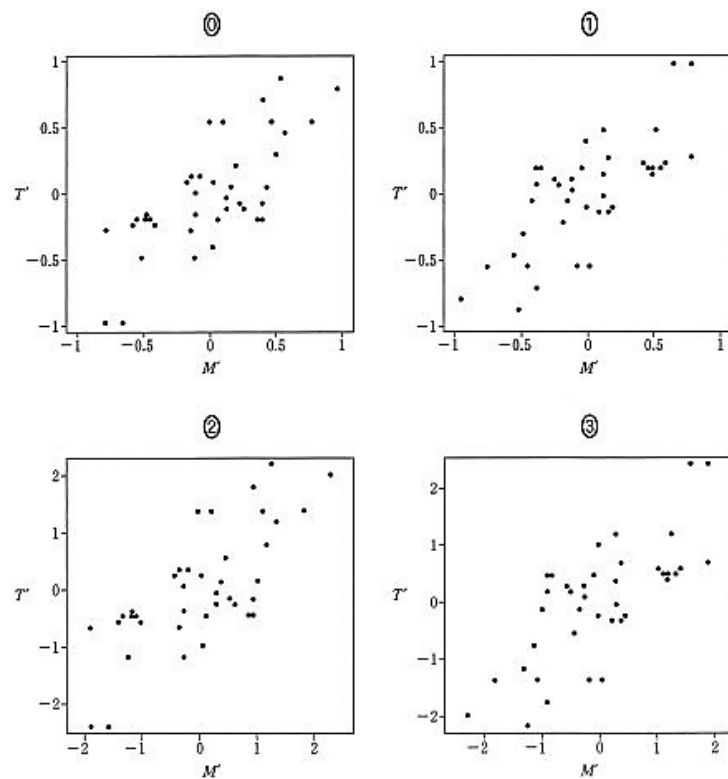


図5 四つの散布図

第3問 (選択問題)(配点 20)

赤い袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており、白い袋には赤球 1 個と白球 1 個が入っている。最初に、さいころ 1 個を投げて、3 の倍数の目が出たら白い袋を選び、それ以外の目が出たら赤い袋を選び、選んだ袋から球を 1 個取り出して、球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を 1 回目の操作とする。2 回目と 3 回目の操作では、直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を 1 個取り出して、球の色を確認してその袋に戻す。

(1) 1 回目の操作で、赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ であり、白い袋が

選ばれ赤球が取り出される確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

(2) 2 回目の操作が白い袋で行われる確率は $\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$ である。

(3) 1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと、2 回目の操作で白球が取り出される確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}p + \frac{1}{3}$ と表される。よって、2 回目の操作で白球が取り出される確率は

$\frac{\text{コサ}}{\text{シスセ}}$ である。同様に考えると、3 回目の操作で白球が取り出される確率は $\frac{\text{ソタチ}}{\text{ツテト}}$ である。

(4) 2 回目の操作で取り出した球が白球であったとき、その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は $\frac{\text{ナニ}}{\text{ヌネ}}$ である。

また、3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき、はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付き確率は $\frac{\text{ノハ}}{\text{ヒフヘ}}$ である。

第4問 (選択問題)(配点 20)

- (1) 不定方程式 $49x - 23y = 1$ の解となる自然数 x, y の中で, x の値が最小のものは $x = \boxed{\text{ア}}$, $y = \boxed{\text{イウ}}$ であり, すべての整数解は, k を整数として

$$x = \boxed{\text{エオ}} k + \boxed{\text{ア}}, y = \boxed{\text{カキ}} k + \boxed{\text{イウ}}$$

と表せる。

- (2) 49 の倍数である自然数 A と 23 の倍数である自然数 B の組 (A, B) を考える。
 A と B の差の絶対値が 1 となる組 (A, B) の中で, A が最小になるのは $(A, B) = (49 \times \boxed{\text{ク}}, 23 \times \boxed{\text{ケコ}})$ である。また, A と B の差の絶対値が 2 となる組 (A, B) の中で, A が最小になるのは $(A, B) = (49 \times \boxed{\text{サ}}, 23 \times \boxed{\text{シス}})$ である。

- (3) 連続する三つの自然数 $a, a+1, a+2$ を考える。

a と $a+1$ の最大公約数は 1

$a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1

a と $a+2$ の最大公約数は 1 または $\boxed{\text{セ}}$

である。

また, 次の条件がすべての自然数 a で成り立つような自然数 m のうち, 最大のものは $m = \boxed{\text{ソ}}$ である。

条件: $a(a+1)(a+2)$ は m の倍数である。

- (4) 6762 を素因数分解すると $6762 = 2 \times \boxed{\text{タ}} \times 7^{\boxed{\text{チ}}} \times \boxed{\text{ツテ}}$ である。

b を, $b(b+1)(b+2)$ が 6762 の倍数となる最小の自然数とする。このとき, $b, b+1, b+2$ のいずれかは $7^{\boxed{\text{チ}}}$ の倍数であり, また, $b, b+1, b+2$ のいずれかは $\boxed{\text{ツテ}}$ の倍数である。したがって, $b = \boxed{\text{トナニ}}$ である。

第5問 (選択問題)(配点 20)

$\triangle ABC$ において, $AB=4, BC=7, AC=5$ とする。このとき, $\cos \angle BAC = -\frac{1}{5}$,

$\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ である。 $\triangle ABC$ の内接円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

この内接円と辺 AB との接点を D , 辺 AC との接点を E とする。 $AD = \boxed{\text{ウ}}$,
 $DE = \frac{\boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

線分 BE と線分 CD の交点を P , 直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。 $\frac{BQ}{CQ} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$
 であるから, $BQ = \boxed{\text{コ}}$ であり, $\triangle ABC$ の内心を I とすると $IQ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

また, 直線 CP と $\triangle ABC$ の内接円との交点で D とは異なる点を F とすると
 $\cos \angle DFE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

数学 II・数学 B (60分, 100点)

第1問 (必答問題)(配点 30)

[1] 関数 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ を考える。

(1) $f(0) = \boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると, $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに,

$\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta - \boxed{\text{ク}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \dots\dots\dots \textcircled{1} \text{ となる。}$$

(3) θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。三角関数の合成を用いると, ①は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$
 と変形できる。

したがって, $m = \boxed{\text{ス}}$ である。また, $0 \leq \theta \leq \pi$ において, $f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は, 小さい順に, $\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$, $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

[2] 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y を求めよう。真数の条件により, x, y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{タ}}$ である。 $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを, 次の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。ただし, 対数 $\log_a b$ に対し, a を底といい, b を真数という。

- ① $x > 0, y > 0$ ② $x > 2, y > 3$ ③ $x > -2, y > -3$
 ④ $x < 0, y < 0$ ⑤ $x < 2, y < 3$ ⑥ $x < -2, y < -3$

底の変換公式により $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

よって, ②から $y = \boxed{\text{ツ}}x + \boxed{\text{テ}}$ $\dots\dots\dots \textcircled{4}$ が得られる。

次に, $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき, ④を用いて③を t の方程式に書き直すと

$$t^2 - \boxed{\text{トナ}}t + \boxed{\text{ニヌ}} = 0 \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

が得られる。また, x が $\boxed{\text{タ}}$ における x の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ネ}} < t < \boxed{\text{ノ}}$ $\dots\dots\dots \textcircled{6}$ である。⑥の範囲で方程式⑤を解くと, $t = \boxed{\text{ハ}}$ となる。したがって, 連立方程式②, ③を満たす実数 x, y の値は

$$x = \log_3 \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}, \quad y = \log_3 \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$
 であることがわかる。

第2問 (必答問題)(配点 30)

p, q を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C 、放物線 $y = -kx^2$ を D 、放物線 D 上の点 $(a, -ka^2)$ を A とする。ただし、 $k > 0, a > 0$ である。

- (1) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、 $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1) = 2$ より、 $p = \boxed{\text{イ}}$ 、 $q = \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

- (2) 点 A における放物線 D の接線を l とする。 D と l および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

l の方程式は $y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka \boxed{\text{ク}}$ ……………① と表せる。 l と x 軸の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり、 D と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積は $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。よって、 $S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。

- (3) さらに、点 A が曲線 C 上にあり、かつ (2) の接線 l が C にも接するとする。このときの (2) の S の値を求めよう。 A が C 上にあるので、 $k = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$ である。 l と C の接点の x 座標を b とすると、 l の方程式は b を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}} (b^2 - \boxed{\text{ナ}})x - \boxed{\text{ニ}} b^3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。 $\textcircled{2}$ の右辺を $g(x)$ とおくと

$f(x) - g(x) = (x - \boxed{\text{ヌ}})^2(x + \boxed{\text{ネ}} b)$ と因数分解されるので、 $a = -\boxed{\text{ネ}} b$ となる。 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の表す直線の傾きを比較することにより、 $a^2 = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって、求める S の値は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

第3問 (選択問題)(配点 20)

初項が 3、公比が 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また、数列 $\{T_n\}$ は、初項が -1 であり、 $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

- (1) $S_2 = \boxed{\text{アイ}}$ 、 $T_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

- (2) $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は、それぞれ

$$S_n = \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} \quad T_n = \frac{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} - n - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

と $\boxed{\text{ク}}$ については、当てはまるものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{4}$ のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでよい。

- $\textcircled{0}$ $n - 1$ $\textcircled{1}$ n $\textcircled{2}$ $n + 1$ $\textcircled{3}$ $n + 2$ $\textcircled{4}$ $n + 3$

- (3) 数列 $\{a_n\}$ は、初項が -3 であり、漸化式 $na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たすとする。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。そのために、 $b_n = \frac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。 $\{b_n\}$ の初項は $\boxed{\text{シス}}$ である。

$\{T_n\}$ は漸化式 $T_{n+1} = \boxed{\text{セ}} T_n + \boxed{\text{ソ}} n + \boxed{\text{タ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすから、 $\{b_n\}$ は漸化式 $b_{n+1} = \boxed{\text{チ}} b_n + \boxed{\text{ツ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすことがわかる。よって、 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\text{テト}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ナ}}$ については、当てはまるものを、次の ①~④ のうちから一つ選べ。

- ① $n-1$ ② n ③ $n+1$ ④ $n+2$ ⑤ $n+3$

したがって、 $\{T_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}} (\boxed{\text{ネ}} n + \boxed{\text{ノ}}) \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \text{ である。}$$

第4問 (選択問題)(配点 20)

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。四角形 ABCD は、辺 AD と辺 BC が平行で、 $AB=CD$, $\angle ABC = \angle BCD$ を満たすとする。

さらに、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ として $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = \sqrt{5}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ であるとする。

- (1) $\angle AOC = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ により、三角形 OAC の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

- (2) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \boxed{\text{オカ}}$, $|\vec{BA}| = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$, $|\vec{BC}| = \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であるから、
 $\angle ABC = \boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ である。

さらに、辺 AD と辺 BC が平行であるから、 $\angle BAD = \angle ADC = \boxed{\text{シス}}^\circ$ である。

よって、 $\vec{AD} = \boxed{\text{セ}} \vec{BC}$ であり $\vec{OD} = \vec{a} - \boxed{\text{ソ}} \vec{b} + \boxed{\text{タ}} \vec{c}$ と表される。

また、四角形 ABCD の面積は $\frac{\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

- (3) 三角形 OAC を底面とする三角錐 BOAC の体積 V を求めよう。

3点 O, A, C の定める平面 α 上に、点 H を $\vec{BH} \perp \vec{a}$ と $\vec{BH} \perp \vec{c}$ が成り立つようにとる。 $|\vec{BH}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は α 上の点であるから、実数 s, t を用いて $\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{c}$ の形に表される。 $\vec{BH} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{ト}}$, $\vec{BH} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ト}}$ により、

$$s = \boxed{\text{ナ}}, t = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ である。よって、} |\vec{BH}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ が得られる。}$$

したがって、(1) により、 $V = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であることがわかる。

- (4) (3) の V を用いると、四角錐 OABCD の体積は $\boxed{\text{フ}} V$ と表せる。

さらに、四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さは $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第5問 (選択問題)(配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 29 ページの正規分布表^{*1)}を用いてもよい。

- (1) ある食品を摂取したときに、血液中の物質 A の量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから 3 時間後に、それぞれ一定量の血液に含まれる物質 A の量(単位は mg)を測定し、その変化量、すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を X とする。 X の期待値(平均)は $E(X) = -7$ 、標準偏差は $\sigma(X) = 5$ とする。このとき、 X^2 の期待値は $E(X^2) = \boxed{\text{アイ}}$ である。また、測定単位を変更して $W = 1000X$ とすると、その期待値は

$$E(W) = -7 \times 10^{\boxed{\text{ウ}}}, \text{ 分散は } V(W) = 5^{\boxed{\text{エ}}} \times 10^{\boxed{\text{オ}}}$$

となる。

- (2) (1) の X が正規分布に従うとすると、物質 A の量が減少しない確率 $P(X \geq 0)$ を求めよう。この確率は $P(X \geq 0) = P\left(\frac{X+7}{5} \geq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right)$ であるので、標準正規分布に従う確率変数を Z とすると、正規分布表から、次のように求められる。

$$P(Z \geq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}) = 0.\boxed{\text{クケ}} \dots\dots\dots \text{①}$$

無作為に抽出された 50 人がこの食品を摂取したときに、物質 A の量が減少するか、減少しないかを考え、物質 A の量が減少しない人数を表す確率変数を M とする。 M は二項分布 $B(50, 0.\boxed{\text{クケ}})$ に従うので、期待値は $E(M) = \boxed{\text{コ}}.\boxed{\text{サ}}$ 、標準偏差は $\sigma(M) = \sqrt{\boxed{\text{シ}}.\boxed{\text{ス}}}$ となる。ただし、 $0.\boxed{\text{クケ}}$ は ① で求めた小数第 2 位までの値とする。

- (3) (1) の食品摂取前と摂取してから 3 時間後に、それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質 B の量(単位は mg)を測定し、その変化量、すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を Y とする。 Y の母集団分布は母平均 m 、母標準偏差 6 をもつとする。 m を推定するため、母集団から無作為に抽出された 100 人に対して物質 B の変化量を測定したところ、標本平均 \bar{Y} の値は -10.2 であった。

このとき、 \bar{Y} の期待値は $E(\bar{Y}) = m$ 、標準偏差は $\sigma(\bar{Y}) = \boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}$ である。

\bar{Y} の分布が正規分布で近似できるとすれば、 $Z = \frac{\bar{Y} - m}{\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}}$ は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。正規分布表を用いて $|Z| \leq 1.64$ となる確率を求めると $0.\boxed{\text{タチ}}$ となる。このことを利用して、母平均 m に対する信頼度 $\boxed{\text{タチ}}\%$ の信頼区間、すなわち、 $\boxed{\text{タチ}}\%$ の確率で m を含む信頼区間を求めると、 $\boxed{\text{ツ}}$ となる。 $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる最も適当なものを、次の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。

$$\text{①} \quad -11.7 \leq m \leq -8.7$$

$$\text{②} \quad -11.4 \leq m \leq -9.0$$

$$\text{②} \quad -11.2 \leq m \leq -9.2$$

$$\text{③} \quad -10.8 \leq m \leq -9.6$$

*1) 原文のまま。正規分布表は本誌には未掲載。

