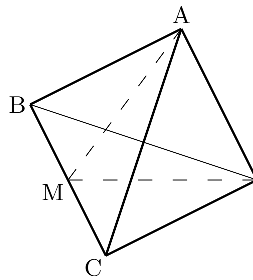
正四面体，単体の中心角

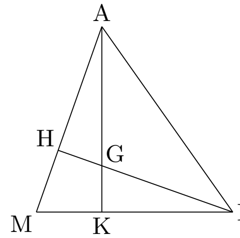
柏陵高等学校　氏家 悟

1　正四面体の中心角



数学 I の教科書には正四面体の体積が載っていたが，中心角も数学 I の内容だろうと求めてみた。いわゆる，メタン分子の絵を模式的に描いたとき，真ん中にある炭素原子から伸びる水素の腕の角度である（本当にそんな形なのかは知らないが）。

四面体の重心は，頂点と底面の三角形の重心を結ぶ直線上にある。三角形の重心は中線上にあるから，図の AM，DM を $2:1$ に内分する点をそれぞれ H，K とすると四面体の重心は AK，DH の交点となり，AK，DH を $3:1$ に内分する点となる。



正四面体の辺の長さを 1 とすれば，

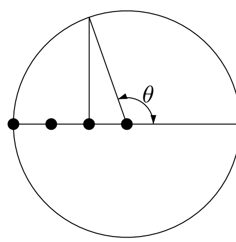
正三角形の中線だから $\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

K は三角形の重心だから $\mathrm{MK}=\dfrac{\mathrm{DM}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\mathrm{AK}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{MK}^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

G は四面体の重心だから $\mathrm{AG}=\dfrac{3}{4}\mathrm{AK}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\triangle\mathrm{GAD}$ に余弦定理を適用して $\cos\angle\mathrm{AGD}=\dfrac{\mathrm{GA}^2+\mathrm{GD}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{GA}\cdot\mathrm{GD}}=-\dfrac{1}{3}$



関数電卓で角度を求めると，$109.4712206\cdots$ 度ではあるが，切りが悪くて分度器で測るのも覚えるのも厄介である。しかし,「余弦が $-\dfrac{1}{3}$ 」は描くのも覚えるのも簡単。この図を 6 個張り合わせればメタンの模型となる。

2　重心の考察

三角形の重心が「中線の交点」となるのは，漠然と「中線は面積を半分にするから重心を通る」と考えていたが，そうではない（重心を通ることが必要条件でない）ことが仲間との話の中で，昨年気づいた。

実際，重心を通り底辺に平行な直線は，三角形の面積を $4:5$ に分け，重心を通るにもかか
らず，面積を半分にしない。ということは，底辺に平行な直線で面積を半分にするものは，
心を通らない。知っている人にとっては,「何をいまさら」だろうが，自分はそれまで考え
みなかったことである。

重心はあくまでも,「無数の質点を 1 点に代表させる」という，解析的な考え方（積分）
めるしかなく，数学 I の教科書で天下りに「中線を $2:1$ に分ける点」と記述しているのも
ずける。数学 I の授業で,「中線は面積を半分にするから重心を通る」と説明したこともあり，
い改めねばならぬことであった。

同じ質量の 2 つの質点の重心は中点である。そして，同じ質量の質点が線分上に等間隔
個並ぶときも重心は線分の中点とる。さらに，線分は無数 $(n \to \infty)$ の質点が均一に広がっ
る状態と考えて,「線分の重心は中点」となるのだろう。

三角形の場合は，底辺に平行な直線で無数に分割したそれぞれは，限りなく線分に近いの
それらの重心はそれぞれの中点となる。したがって，それら重心はすべて三角形の中線上
ぶから，三角形の重心は中線上にあることになり,「中線の交点が重心」となる。

四面体も底面に平行な平面で無数に分割し，そのときの切り口の各三角形の重心は，頂
底面の三角形の重心を結ぶ直線上に並ぶ。したがって，四面体の重心は，頂点と底面の三
の重心を結ぶ直線上にある。よって，別の底面の重心と頂点を結ぶ直線との交点が，四面
重心となる。

3　ベクトルバージョン

さて，正四面体の中心角の余弦をベクトルでも求めてみた。ベクトルを使えば，三平方の
理や，余弦定理などを意識することはなくなる。

そもそも，余弦定理は三平方の定理の拡張であるし，ベクトルの内積は余弦定理そのもの
ある。つまりベクトルの内積を使うことは，余弦定理や三平方の定理を使うことと同じで，
の分計算が抽象化され，あまり図形を意識することがなくなる。

つまり，ベクトルを使うことによって，立体を意識することはなくなり，せいぜい「正
形の内積」を使う程度の計算問題（数学 B ）となる。

正四面体の頂点のひとつを原点 $\mathrm{O}(\vec{0})$ とし，他の 3 つの頂点の位置ベクトルを $\mathrm{A}(\vec{a})$ ，B(
$\mathrm{C}(\vec{c})$ とすると，重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は 4 頂点の真ん中なので，$\vec{g} = \dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ である。

このとき，G から頂点 O ，A にのばした半直線のなす角（つまり中心角）を θ とする
$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|}$ であるから，分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}} = \vec{0}-\vec{g} = -\vec{g}\ ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{a}-\vec{g}$$

まずは分子の計算。

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}} = -\vec{g}\cdot(\vec{a}-\vec{g}) = -\vec{g}\cdot\vec{a}+\left|\vec{g}\right|^2\ ,$$

ここで,

$$\vec{g}\cdot\vec{a}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\frac{1}{4}(\left|\vec{a}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$\left|\vec{g}\right|^2=\vec{g}\cdot\vec{g}=\left(\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right)\cdot\left(\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right)=\frac{1}{16}(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2$$

ここで，辺の長さを 1 とすれば，各位置ベクトルの大きさは $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$ となり，す
ての三角形は正三角形であるから 2 辺の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$
ある。他も同様に，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より

$$\vec{g}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\ ,\ \left|\vec{g}\right|^2=\frac{3}{8}$$

したがって，分子は

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\vec{g}\cdot\vec{a}+\left|\vec{g}\right|^2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}\ ,$$

つづいて分母だが，図の対称性より重心から見た頂点 A，O は可換であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|=\left|\right.$
より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|^2=\left|\vec{g}\right|^2=\frac{3}{8}$$

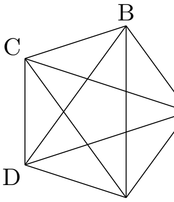
ゆえに，

$$\cos\theta=-\frac{1}{8}\div\frac{3}{8}=-\frac{1}{3}$$

4　五胞体の中心角

三角形は「2 次元単体」でその中心角の余弦は $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$，四面体は「3 次元単体」
その中心角の余弦は $-\frac{1}{3}$ であるから，4 次元単体のすべての辺の長さが等しい正五胞体の中
角の余弦は $-\frac{1}{4}$ ではなかろうか。

ベクトルを使えば立体図形に頼らないので，計算できそうである。



一応図にすると，どれが手前の線なのかわからいのですべて同じ太さの線で描くと，正 5 角形の中に五芒星を書き入れた平面図形に見える。これは 5 点のすべてを結んだ「完全グラフ」と言われる。しかし，この場合平面ではなく，頂点 5 個，辺 ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 本，三角形 ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 個，四面体 ${}_5\mathrm{C}_4=5$ つにかこまれた立体と考えていただきたい。

ちなみに，最初の正四面体の図は，線の太さを変えて立体的に見せているとはいえ，あえて正方形に対角線をひいた形（4 点の完全グラフ）に描いている。

この五胞体の重心は，頂点 A から四面体 BCDE の重心へ引いた直線と，頂点 B から四面
CDEA の重心へ引いた直線との交点になり，その位置は「頂点の座標の和 ÷ 5」になるわけ
が，三平方の定理や余弦定理（数学 I）を駆使して中心角を求めようとすると，頭がくらく
する。

ベクトルによる手順は，正四面体に 4 次元方向に単純に点が 1 個増えただけで，正四面
手順と同じである。

正五胞体の頂点のひとつを原点 $\mathrm{O}(\vec{0})$ とし，他の 4 つの頂点の位置ベクトルを $\mathrm{A}(\vec{a})$ ，B
$\mathrm{C}(\vec{c})$ ，$\mathrm{D}(\vec{d})$ とすると，重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は 5 頂点の真ん中なので，$\vec{g}=\dfrac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ である

このとき，G から頂点 O ，A にのばした半直線のなす角（つまり中心角）を θ とする
$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|}$ であるから，分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}=\vec{0}-\vec{g}=-\vec{g}\ ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}-\vec{g}$$

まずは分子の計算。

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\vec{g}\cdot(\vec{a}-\vec{g})=-\vec{g}\cdot\vec{a}+\left|\vec{g}\right|^2\ ,$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\vec{g}\cdot\vec{a}&=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{a}=\frac{1}{5}(\left|\vec{a}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{a})\\
\left|\vec{g}\right|^2&=\vec{g}\cdot\vec{g}=\left(\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\right)\cdot\left(\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\right)\\
&=\frac{1}{25}(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{d}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{d}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{d}+2\vec{c}\cdot\vec{d})
\end{aligned}$$

ここで，辺の長さを 1 とすれば，各位置ベクトルの大きさは $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|=1$ とな
すべての三角形は正三角形であるから 2 辺の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos 60^\circ=$
である。他も同様に，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$ より

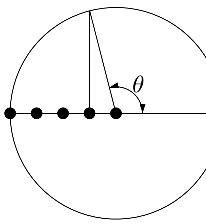
$$\vec{g}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\ ,\qquad \left|\vec{g}\right|^2=\frac{2}{5}$$

したがって，分子は

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\vec{g}\cdot\vec{a}+\left|\vec{g}\right|^2=-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=-\frac{1}{10}\ ,$$

つづいて分母だが，図の対称性より重心から見た頂点 A ，O は可換で
あるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|$ より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|^2=\left|\vec{g}\right|^2=\frac{2}{5}$$



ゆえに，

$$\cos\theta=-\frac{1}{10}\div\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}$$

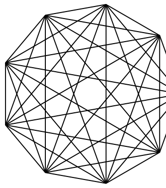
と予想通りである。そして，図のような大きさとなる。

5　正 n 次元単体の中心角

調子に乗って，

1 次元単体「線分」の重心は中点で，その角の余弦は $\cos 180^\circ = -1$
正 2 次元単体の中心角の余弦は $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$
正 3 次元単体の中心角の余弦は $-\dfrac{1}{3}$
正 4 次元単体の中心角の余弦は $-\dfrac{1}{4}$

から，正 n 次元単体の中心角の余弦は $-\dfrac{1}{n}$ だろう。$n+1$ 個の点で考え，ベクトルで計算す
だけである。空間的な想像力を別にすれば，機械的な計算であり，図形に頼るのは，正三角
の辺の長さ程度で，まさに「代数」の威力である。



五胞体の絵のように，n 次元単体を平面に描くと $n+1$ 個の頂点をすべて直線で結んだ，グラフ理論で言ういわるゆる「完全グラフ」になる。つまり，n 次元単体は，頂点 $n+1$ 個，辺 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$ 個，正三角形 ${}_{n+1}\mathrm{C}_3$ 個，正四面体 ${}_{n+1}\mathrm{C}_4$ 個，正五胞体 ${}_{n+1}\mathrm{C}_5$ 個，$\cdots$，正 $n-1$ 次元単体 ${}_{n+1}\mathrm{C}_n$ 個で囲まれた図形になる（図は 8 次元単体）。

頂点のひとつを原点 $\mathrm{O}(\vec{0})$ とし，他の n 個の頂点の位置ベクトルを $\mathrm{A}_1(\vec{a_1})$，$\mathrm{A}_2(\vec{a_2})$，$\cdot$
$\mathrm{A}_n(\vec{a_n})$，とすると，重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ は $n+1$ 個頂点の真ん中なので，$\vec{g} = \dfrac{1}{n+1}(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+$
である。

このとき，G から頂点 O，A_1 にのばした半直線のなす角（つまり中心角）を θ とする
$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}\right|}$ であるから，分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}} = \vec{0}-\vec{g} = -\vec{g}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{GA}_1} = \vec{a_1}-\vec{g}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} = -\vec{g}\cdot(\vec{a_1}-\vec{g}) = -\vec{g}\cdot\vec{a_1}+\left|\vec{g}\right|^2$$

ここで，

$$\vec{g}\cdot\vec{a_1} = \frac{1}{n+1}(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n})\cdot\vec{a_1} = \frac{1}{n+1}(\left|\vec{a_1}\right|^2+\vec{a_2}\cdot\vec{a_1}+\cdots+\vec{a_n}\cdot\vec{a_1})$$
$$\left|\vec{g}\right|^2 = \vec{g}\cdot\vec{g} = \frac{1}{n+1}(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n})\cdot\frac{1}{n+1}(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n})$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2}(\left|\vec{a_1}\right|^2+\left|\vec{a_2}\right|^2+\cdots+\left|\vec{a_n}\right|^2+2\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}+2\vec{a_1}\cdot\vec{a_3}+\cdots+2\vec{a_{n-2}}\cdot\vec{a_n}+2\vec{a_{n-1}}\cdot$$

ここで，辺の長さを 1 とすれば，三角形 $\mathrm{OA_1A_2}$ は正三角形で，2 辺 OA_1，OA_2 のなす角
60° だから，

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_1} = \left|\vec{a_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|^2 = 1$$
$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

他の番号についても同様に，$i \fallingdotseq j$ のとき $\mathrm{OA_iA_j}$ は正三角形だから

$$\vec{a_i}\cdot\vec{a_i} = \left|\vec{a_i}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right|^2 = 1$$
$$i \fallingdotseq j \text{ ならば，} \vec{a_i}\cdot\vec{a_j} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_j} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_j}\right|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\vec{g}\cdot\vec{a_1} = \frac{1}{n+1}(\left|\vec{a_1}\right|^2 + \vec{a_2}\cdot\vec{a_1} + \cdots + \vec{a_n}\cdot\vec{a_1}) = \frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2})$$

においては，$\dfrac{1}{2}$ の項は $n-1$ 個あるので，

$$\vec{g}\cdot\vec{a_1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\right) = \frac{1}{2}$$

$\left|\vec{g}\right|^2$ においては，$\left|\vec{a_i}\right|^2 = 1$ の項は n 個，$i \fallingdotseq j$ のとき，$2\vec{a_i}\cdot\vec{a_j} = 2\dfrac{1}{2} = 1$ の項は ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{n(n-}{2}$
個あるから，

$$\left|\vec{g}\right|^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n}{2(n+1)}$$

ゆえに分子は，

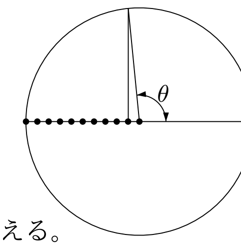
$$\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} = -\vec{g}\cdot\vec{a_1} + \left|\vec{g}\right|^2 = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{-1}{2(n+1)}$$

つづいて分母だが，図の対称性より重心から見た頂点 A_1，O は可換であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{O}}\right.$
より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|^2 = \left|\vec{g}\right|^2 = \frac{n}{2(n+1)}$$

したがって，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{GO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}\right|} = \frac{-1}{2(n+1)} \div \frac{n}{2(n+1)} = -\frac{1}{n}$$



が得られ，予想通りであった。

　このことから，正 n 次元単体の中心角の $n \to \infty$ の極限は直角といえる。