

非多面体の方程式について

鎌ヶ谷西高等学校 新堀 弘駿

1 回転面の方程式

(1) 回転面化の定理

平面 α 上に線状の図形 C があって、 α 上の直線 l を軸として回転したとき、 C の回転によって作られる図形を回転面という。回転面を作る図形 C を母線という。平面 α に直交座標を設定し、その下で図形 C が x, y の方程式として $f(x, y) = 0$ と表されたと仮定する。ただ、この小論で議論するのは、図形 C の $x \geq 0$ を満たす領域に属する部分であり、この C の部分図形を母線と呼ぶことにする。

定理 I

母線 ($f(x, y) = 0$ かつ $x \geq 0$) を y 軸の周りに 1 回転して作られる回転面の方程式は $f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ (1) である。

[証明] 母線 ($f(x, y) = 0$ のグラフの $x \geq 0$ の領域に属する部分) 上の任意の点 P の座標を xy 平面上で (u, v) とせよ。ただし、 $u \geq 0$ とする。

xy 平面上の原点 O を貫く z 軸を 3 本の座標軸が右手系をなすように垂直に立てる。

点 P が y 軸の周りに描く軌道の上に、やはり任意の点 Q をとって、3次元空間内の座標で (x, y, z) で表すものとする。 (u, v) と (x, y, z) の間には、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + z^2} \\ v = y \end{cases}$$

ところで、 (u, v) は $f(u, v) = 0$ を満たしているのだから (x, y, z) は $f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ を満たす。

母線 C を y 軸の周りに 1 回転して作られる回転面 S のイメージは、その表式と対応させると、次のようになる。

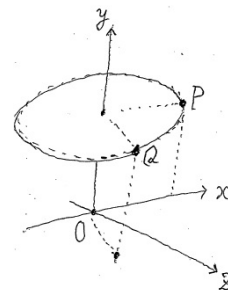


図 1

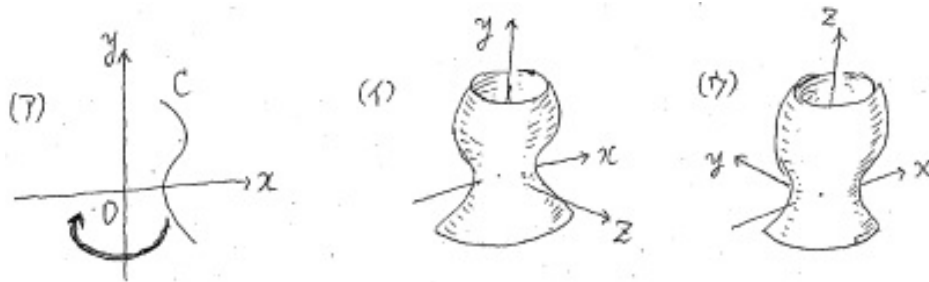


図 2

回転面 S は xy 平面に関して鏡映対称であるから、回転軸を y 軸から z 軸に変え、 z 軸は逆向きにして y 軸とすることで、回転面 S の方程式として次を得る。

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad (2)$$

(2) 円錐台の方程式

円錐を底面と平行な平面で切って、その上側を除いたものを円錐台という。我々が扱うのは直円錐から作られる円錐台である。



図 3

(図 3)

上底面、下底面の半径がそれぞれ a, b ($0 \leq a \leq b$) で、高さが $2h$ である円錐台を考える。この円錐台を軸を含む平面で切って、座標を適当に設定し、母線を選ぶ。

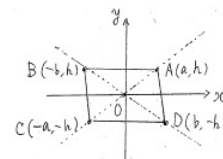


図 4

4 点 $A(a, h), B(-b, h), C(-a, -h), D(b, -h)$ を頂点とする平行四辺形の $x \geq 0$ の領域に属する部分を母線としよう。平行四辺形 $ABCD$ の方程式は $|ay - hx| + |by + hx| = (a + b)h$ (3) である。

これを y 軸の周りに 1 回転して作られる円錐台の方程式は定理 I を用いると $|ay - h\sqrt{x^2 + z^2}| + |by + h\sqrt{x^2 + z^2}| = (a + b)h$ (4) と表せる。よって回転軸が z 軸に重なるようにすると図 5 のような上底面、下底面の半径がそれぞれ a, b で、高さ $2h$ である円錐台の方程式として $|az - h\sqrt{x^2 + y^2}| + |bz + h\sqrt{x^2 + y^2}| = (a + b)h$ (5) が得られる。

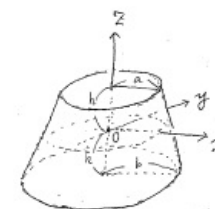


図 5

(3) 円柱および円錐の方程式

式 (5) において、とくに

(a) $a = b$ とおくと、底面の半径 a 、高さ $2h$ の直円柱の方程式

$$|az - h\sqrt{x^2 + y^2}| + |az + h\sqrt{x^2 + y^2}| = 2ah \quad (6)$$

(b) $a = 0, b$ を a とおくと、底面の半径 a 、高さ $2h$ の直円錐の方程式

$$|h\sqrt{x^2 + y^2}| + |az + h\sqrt{x^2 + y^2}| = ah \quad (7) \text{ が得られる。}$$

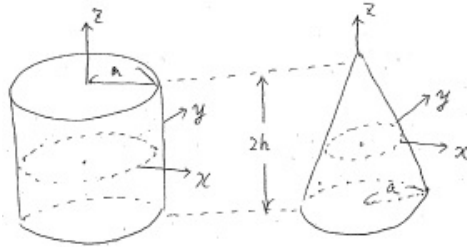


図 6

図 7

(4) 底面のない回転面の方程式

式⑤～⑦で表される立体図形は、いずれも曲面で囲まれた曲面体であるが、母線を例えば線分にすると、回転面として側面のみ存在し、底面のないものが作られる。そこで関数 $f(x, y)$ のグラフから、定義域 $\alpha \leq x \leq \beta$ の領域に存在する部分のみ残し、他は消去する方法を紹介しよう。

定理 II (部分化)

方程式 $f(x, y) = 0$ のグラフから、定義域 $\alpha \leq x \leq \beta$ に属する部分のみ残させる方程式は

$$|f(x, y)| + |x - \alpha| + |x - \beta| = |\beta - \alpha| \quad (8) \quad \text{と表される。}$$

[証明] (i) 点 (x_1, y_1) が $x_1 < \alpha$ でありながら、 $f(x_1, y_1) = 0$ を満たすものとせよ。

$$|f(x_1, y_1)| + |x_1 - \alpha| + |x_1 - \beta| = 0 - (x_1 - \alpha) - (x_1 - \beta) = -2x_1 + \alpha + \beta = \beta - \alpha$$

$\therefore x_1 = \alpha$ ゆえに矛盾する。

(ii) $x_2 > \beta$ としても同様である。

$$(iii) \alpha \leq x_3 \leq \beta \text{ ならば } |f(x_3, y_3)| + |x_3 - \alpha| + |x_3 - \beta| = 0 + (x_3 - \alpha) - (x_3 - \beta) = \beta - \alpha = \text{右辺}$$

上の定理 II により、直線 $ax + by + c = 0$ の $\alpha \leq x \leq \beta$ に属する線分 AB の方程式は $|ax + by + c| + |x - \alpha| + |x - \beta| = |\beta - \alpha|$ (9) となる。値域を用いてもよい。

これから、底面のない円錐面の方程式を求めることは容易である。例えば、線分 OA の方程式を $|z - \sqrt{3}x| + |z| + |z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ と求めて、 x を $\sqrt{x^2 + y^2}$ に置き換えた式 $|z - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}| + |z| + |z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ (10)

平面上の多角形や折れ線図形の方程式は一意的には決められない。空間内の多面体の方程式も当然一意的に表せない。この表現の多様性に関する取り扱い、今のところ、棚上げの状態である。

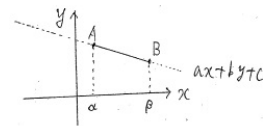


図 8

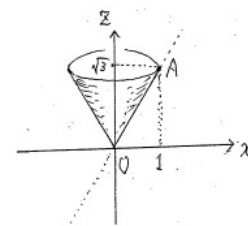


図 9

2 錐体の方程式

(1) 正多角形関数の相似性

正 N 角形の方程式から、関数

$$P_N(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left| x \sin \frac{2k\pi}{N} - |y| \cos \frac{2k\pi}{N} \right| + \frac{1}{2} \left| y \sin \frac{N\pi}{2} \right| - \frac{1}{2} x \cdot \cot \frac{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \pi}{N}}{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sin \frac{2k\pi}{N} - \frac{1}{2} \cot \frac{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \pi}{N}} \quad (1)$$

をつくる。錐体の方程式を見出すためには、横断面を表すこの関数 $P_N(x, y)$ が、原点を中心として相似となる正 N 角形の族をなすことを証明する必要がある。簡単のために

$$P_N^*(x, y) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left| x \sin \frac{2k\pi}{N} - |y| \cos \frac{2k\pi}{N} \right| + \frac{1}{2} \left| y \sin \frac{N\pi}{2} \right| - \frac{1}{2} x \cdot \cot \frac{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \pi}{N} \quad (2)$$

について示せば十分である。

原点の座標 $(0, 0)$ に対して、 $P_N^*(0, 0) = 0$ となる。原点以外の点に対しては、点 (x, y) の座標を極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$) (3) を用いて、 $P_N^*(x, y)$ が非負の値をとることを示そう。

(i) $N = 2n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) の場合

$$\begin{aligned} P_N^*(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sum_{k=1}^n \left| r \cos \theta \cdot \sin \frac{k\pi}{n} - |r \sin \theta| \cdot \cos \frac{k\pi}{n} \right| + \frac{1}{2} |r \sin \theta \cdot \sin n\pi| - \\ &= \frac{1}{2} r \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n} = r \sum_{k=1}^n \left| \cos \theta \cdot \sin \frac{k\pi}{n} - |\sin \theta| \cdot \cos \frac{k\pi}{n} \right| \\ &= r \sum_{k=1}^n \left| \sin \left(\theta \pm \frac{k\pi}{n} \right) \right| \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$P_N^*(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cdot P_N^*(\cos \theta, \sin \theta)$ も成り立つ。

(ii) $N = 2n+1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の場合にも $P_{2n+1}^*(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cdot P_{2n+1}^*(\cos \theta, \sin \theta)$ が成り立つことは明らかなので、 $P_{2n+1}^*(\cos \theta, \sin \theta)$ が非負値をとることを示せば十分である。

(a) $\frac{2L\pi}{2n+1} \leq \theta < \frac{2(L+1)\pi}{2n+1}$ ($L = 0, 1, 2, \dots, n-1$) のとき

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \left| \cos \theta \cdot \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - |\sin \theta| \cdot \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right| + \frac{1}{2} |\sin \theta| - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \cos \theta \cdot \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - \sin \theta \cdot \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right| + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \sin \left(\frac{2k\pi}{2n+1} - \theta \right) \right| + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^L \sin \left(\theta - \frac{2k\pi}{2n+1} \right) - \sum_{k=L+1}^n \sin \left(\theta - \frac{2k\pi}{2n+1} \right) + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= - \sum_{k=1}^n \sin \left(\theta - \frac{2k\pi}{2n+1} \right) + 2 \sum_{k=1}^L \sin \left(\theta - \frac{2k\pi}{2n+1} \right) + \frac{1}{2} \sin \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\ &= - \sin \theta \cdot \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + \cos \theta \cdot \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{2n+1} + 2 \sin \theta \cdot \sum_{k=1}^L \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \cos \theta \cdot \sum_{k=1}^L \sin \frac{2k\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = -\sin \theta \cdot \frac{1}{2-2\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \cos \frac{2\pi}{2n+1} - 1 + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} - \cos \frac{2(n+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& + \cos \theta \cdot \frac{1}{2-2\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{2n\pi}{2n+1} - \sin \frac{2(n+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& + 2 \sin \theta \cdot \frac{1}{2-2\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \cos \frac{2\pi}{2n+1} - 1 + \cos \frac{2L\pi}{2n+1} - \cos \frac{2(L+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& - 2 \cos \theta \cdot \frac{1}{2-2\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{2L\pi}{2n+1} - \sin \frac{2(L+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sin \theta}{2-2\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left(\cos \frac{2n\pi}{2n+1} - \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right. \\
& \quad \left. + \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right) \\
& + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{1-\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \right. \\
& \quad \left. \left(1 - \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right) - \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right\} \\
& - \sin \theta + \frac{\sin \theta}{1-\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left(\cos \frac{2L\pi}{2n+1} - \cos \frac{2L\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right. \\
& \quad \left. + \sin \frac{2L\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right) \\
& - \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{\cos \theta}{1-\cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left(\sin \frac{2L\pi}{2n+1} - \sin \frac{2L\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right. \\
& \quad \left. - \cos \frac{2L\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = -\frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} \\
& + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \sin \frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} + \sin \theta \cdot \cos \frac{2L\pi}{2n+1} \\
& + \sin \theta \cdot \sin \frac{2L\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \cos \theta \cdot \sin \frac{2L\pi}{2n+1} \\
& + \cos \theta \cdot \cos \frac{2L\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = -\frac{1}{2} \sin \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) + \sin \left(\theta - \frac{2L\pi}{2n+1} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) \cot \frac{\pi}{2n+1} \\
& + \cos \left(\theta - \frac{2L\pi}{2n+1} \right) \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = -\frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} + \cos \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) \cos \frac{\pi}{2n+1} \right\} \\
& \quad \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\
& + \left\{ \sin \left(\theta - \frac{2L\pi}{2n+1} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} + \cos \left(\theta - \frac{2L\pi}{2n+1} \right) \cos \frac{\pi}{2n+1} \right\} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\
& - \frac{1}{2} \cos \theta \left(\cot \frac{\pi}{2n+1} + \cot \frac{n\pi}{2n+1} \right) \\
& = -\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{\pi}{2n+1} \right) + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos \left(\theta - \frac{2L\pi}{2n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{2n+1}) \\
& -\frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{n\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1}} \\
& = -\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos(\theta - \pi) + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos\left(\theta - \frac{2L+1}{2n+1} \pi\right) \\
& -\frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2n+1} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1}} \\
& \text{ここで, } \sin \frac{n+1}{2n+1} \pi = \sin \frac{2n+1-n}{2n+1} \pi = \sin\left(\pi - \frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sin \frac{n\pi}{2n+1} \text{ だ} \\
& \text{から} \\
& = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos \theta + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos\left(\theta - \frac{2L+1}{2n+1} \pi\right) \\
& -\frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1}} \\
& = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos\left(\theta - \frac{2L+1}{2n+1} \pi\right) > 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

(b) $\frac{2n\pi}{2n+1} \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left| \cos \theta \cdot \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - |\sin \theta| \cdot \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right| + \frac{1}{2} |\sin \theta| - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \sum_{k=1}^n \left| \cos \theta \cdot \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - \sin \theta \cdot \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right| + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \sum_{k=1}^n \left| \sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1} - \theta\right) \right| + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \sum_{k=1}^n \sin\left(\theta - \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \sin \theta \cdot \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} - \cos \theta \cdot \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \sin \theta \cdot \frac{1}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \cos \frac{2\pi}{2n+1} - 1 + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} - \cos \frac{2(n+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& - \cos \theta \cdot \frac{1}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{2n\pi}{2n+1} - \sin \frac{2(n+1)\pi}{2n+1} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sin \theta}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{2n+1}} \left(\cos \frac{2n\pi}{2n+1} - \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right. \\
& \left. + \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right) \\
& - \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \sin \frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} \\
& + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} \\
& - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \sin \frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1} \\
& = \frac{1}{2} \sin\left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1}\right) \cot \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{\pi}{2n+1} \\
& - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \cot \frac{n\pi}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) \sin \frac{\pi}{2n+1} + \cos \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} \right) \cos \frac{\pi}{2n+1} \right\} \\
 &\quad \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \cos \theta \left(\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cot \frac{n\pi}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cos \left(\theta - \frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{\pi}{2n+1} \right) \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\theta - \pi) \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} - \frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\
 &= -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos \theta \quad (6)
 \end{aligned}$$

θ の範囲から、これも正值をとることがわかる。

$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} < 0$ を満たす点 (x, y) が存在しないような $\xi = P_N(x, y)$ を満たす点 (x, y) も存在しないことがわかった。したがって、連立方程式

$$\begin{cases} |az - hx| + |bz + hx| = (a+b)h \\ z = t \end{cases}$$

の解となる点 (ξ, t) の集合は図 10 の折れ線 $EA \cup AD \cup DF$ をなすことがわかる。これを $z = t$ における t の値の変化に応じて表せば

- (a) $t > h$ のとき ξ は存在しない。
- (b) $t = h$ のとき $0 \leq \xi \leq a$
- (c) $-h < t < h$ のとき $\xi = \frac{(a+b)h + (a-b)t}{2h}$ ($a < \xi < b$)
- (d) $t = -h$ のとき $0 \leq \xi \leq b$
- (e) $t < -h$ のとき ξ は存在しない。

つまり、 $t = -h, h$ のとき、それぞれ上底面、下底面、

$-h < t < h$ のとき、高さ t の位置で多角形 $P_N(x, y) = \xi$ のグラフとなる。

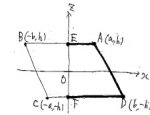


図 10

(2) 正多角柱および正多角錐の方程式

先の円錐台の方程式⑤における $\sqrt{x^2 + y^2}$ の箇所に、 $P_N(x, y)$ を代入した式；

$$|az - hP_N(x, y)| + |bz + hP_N(x, y)| = (a+b)h \quad (7)$$

は正 N 角錐台の方程式になることがわかる。上底面の正 N 角形は、点 $(a, 0, h)$ が 1 つの頂点、下底面の正 N 角形は、点 $(b, 0, -h)$ が 1 つの頂点となっている。両底面間の距離、すなわち高さは $2h$ であり、軸の中点の位置に原点 O がある。円錐台から円柱・円錐に移行したように、正 N 角錐台から正 N 角柱・正 N 角錐に移行することができる。

(a) $a = b$ から、正 N 角柱の方程式

$$|az - hP_N(x, y)| + |az + hP_N(x, y)| = 2ah \quad (8)$$

(b) $a = 0$, b を a として、正 N 角錐の方程式

$$|hP_N(x, y)| + |az + hP_N(x, y)| = ah \quad (9)$$

が得られる。

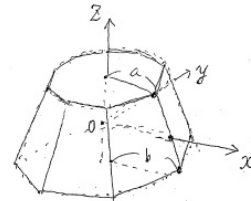


図 11

関数 $P_N(x, y)$ を $N = 3, 4, 5, 6$ の場合に限り、より簡潔な形に直してみよう。

$N = 3$ の場合

$$P_3(x, y) = \frac{|x \sin \frac{2\pi}{3} - |y| \cos \frac{2\pi}{3}| + \frac{1}{2} |y \sin \frac{3\pi}{2}| - \frac{1}{2} x \cot \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{3}}$$

$$= \left| \frac{3}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} |y| \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} |y| - \frac{1}{2} x \quad (10)$$

$N = 4$ の場合

$$P_4(x, y) = \frac{|x \sin \frac{2\pi}{4} - |y| \cos \frac{2\pi}{4}| + |x \sin \frac{4\pi}{4} - |y| \cos \frac{4\pi}{4}| + \frac{1}{2} |y \sin \frac{4\pi}{2}| - \frac{1}{2} x \cot \frac{2\pi}{4}}{\sin \frac{2\pi}{4} + \sin \frac{4\pi}{4} - \frac{1}{2} \cot \frac{2\pi}{4}}$$

$$= |x| + |y| \quad (11)$$

$N = 5$ の場合

$$P_5(x, y) = \frac{|x \sin \frac{2\pi}{5} - |y| \cos \frac{2\pi}{5}| + |x \sin \frac{4\pi}{5} - |y| \cos \frac{4\pi}{5}| + \frac{1}{2} |y \sin \frac{5\pi}{2}| - \frac{1}{2} x \cot \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \frac{1}{2} \cot \frac{2\pi}{5}}$$

$$= \frac{\left| \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} x - \frac{\sqrt{5}-1}{4} |y| \right| + \left| \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} x + \frac{1+\sqrt{5}}{4} |y| \right| + \frac{1}{2} |y| - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}$$

$$= \frac{\left| \sqrt{\sqrt{5} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}} x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} |y| \right| + \left| \sqrt{-\sqrt{5} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}} x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} |y| \right| + |y| - x \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}}{2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}}$$

$$= \left| \frac{\sqrt{30-10\sqrt{5}}}{4} x - \frac{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{4} |y| \right| + \left| \frac{\sqrt{70-30\sqrt{5}}}{4} x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} |y| \right|$$

$$+ \sqrt{5-2\sqrt{5}} |y| - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) x \quad (12)$$

$N = 6$ の場合

$$P_6(x, y) = \frac{|x \sin \frac{2\pi}{6} - |y| \cos \frac{2\pi}{6}| + |x \sin \frac{4\pi}{6} - |y| \cos \frac{4\pi}{6}| + |x \sin \frac{6\pi}{6} - |y| \cos \frac{6\pi}{6}| + \frac{1}{2} |y \sin \frac{6\pi}{2}| - \frac{1}{2} x \cot \frac{3\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{6} + \sin \frac{6\pi}{6} - \frac{1}{2} \cot \frac{3\pi}{6}}$$

$$= \left| \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{6} |y| \right| + \left| \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{6} |y| \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y|$$

$$= \left| \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \left| \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \quad (13)$$

以上、(10)~(13)における $P_N(x, y)$ の具体的式を (8), (9) に代入すれば、正多角柱・正多角錐の方程式の1つの表現が得られる。例えば、正六角錐の方程式として

$$h \left(\left| \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \left| \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \right) + \left| az + h \left(\left| \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \left| \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{6} y \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \right) \right|$$

$$= ah \quad (14) \text{ が得られる。}$$

3 回転体の方程式

(1) 内部を含む平面図形の方程式

図形 C が線で囲まれた図形るとき、これを回転してできる図形を回転体という。そこで与えられた平面曲線とその内部の点を含む図形 C を不等式ではなく、等式の形で表す方法を紹介しよう。

定理 III

不等式 $f(x, y) \leq 0$ を表す領域は、方程式
 $|f(x, y)| + f(x, y) = 0$ (1) と表すことができる。

[証明] $\Delta = \{(x, y) | f(x, y) \leq 0\}$

$z = f(x, y)$ とおけば、任意の $(x, y) \in \Delta$ に対して、 $f(x, y) = z \leq 0$ であるから
 $|z| + z = -z + z = 0$

また、 $z > 0$ のときは、 $|z| + z = z + z = 2z > 0$

したがって、 $(x, y) \notin \Delta$

例えば、中心 $(b, 0)$ 、半径 a の円とその内部を含む円板の方程式は

$$|(x-a)^2 + y^2 - a^2| + (x-b)^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (a < b)$$

と表せるから、これを y 軸の周りに 1 回転してできる輪環体の方程式は

$$|(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 - a^2| + (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

と表せる。上の例でもわかるように、回転体の方程式は、母線とその内部を含む図形の表式に依存している。そこで、ここではその内部も含む図形の方程式の応用として、フラクタル図形の方程式化を試みるが、そのためには対称化法が必要である。

(2) 対称化法

定理 IV

方程式 $f(x, y, z) = 0$ において、 x を $|x|$ に置き換えた式 $f(|x|, y, z) = 0$ のグラフは $f(x, y, z) = 0$ の表すグラフにおける $x \geq 0$ に属する部分と yz 平面に関するその鏡映グラフとの和集合に対称化される。

* x 方向の対称化とよぶ。

[証明] yz 平面に関して、対称な位置にある 2 点 (x_1, y_1, z_1) , $(-x_1, y_1, z_1)$ は $f(|x|, y, z) = 0$ のグラフ上に存在するかしないかは同時に起こることがわかる。対称化法を用いると、正三角形の方程式などは簡単に求めることができる。直線 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ を x 方向に対称化すると、 $y = -\sqrt{3}|x| + \sqrt{3}$

さらに、原点を中心に $-\frac{2}{3}\pi$ 回転すると

$$x \sin \frac{2}{3}\pi + y \cos \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3} \left| x \cos \frac{2}{3}\pi - y \sin \frac{2}{3}\pi \right| + \sqrt{3}$$

最後にもう一度、 x 方向に対称化すると

$$|x| \sin \frac{2}{3}\pi + y \cos \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3} \left| |x| \cos \frac{2}{3}\pi - y \sin \frac{2}{3}\pi \right| + \sqrt{3}$$

$\sin \frac{2}{3}\pi$, $\cos \frac{2}{3}\pi$ の値を代入して整理すると、正三角形の方程式

$$\sqrt{3}|x| - y + \sqrt{3}||x| + \sqrt{3}y| = 2\sqrt{3} \quad (3) \text{ が得られる。}$$

不等式で表す領域を等式化する方法と対称化法を用いると、フラクタル図形の一つを方程式で表すことができる。それでは、シェルピンスキーのギャスケットと呼ばれる図形の方程式を求めてみる。

(3) シェルピンスキーのギャスキットの方程式

内部を含む三角形において、各辺の中点を1結んで、中央の正三角形を内部ごと取り除いて、辺の長さをもと1の半分の3つの三角形から成る図形を作る。この操作を残った3つの三角形に対して行う。この操作を際限なく繰り返すことで得られる点集合をシェルピンスキーのギャスキットという。最初の内部を含む正三角形を D_0 、第1回の操作でできる点の集合を D_1 、 \dots 、第 n 回目の操作でできる点集合を D_n とすると

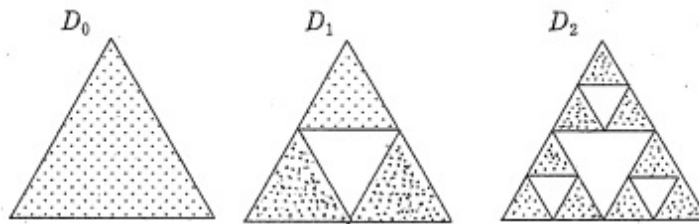


図 12

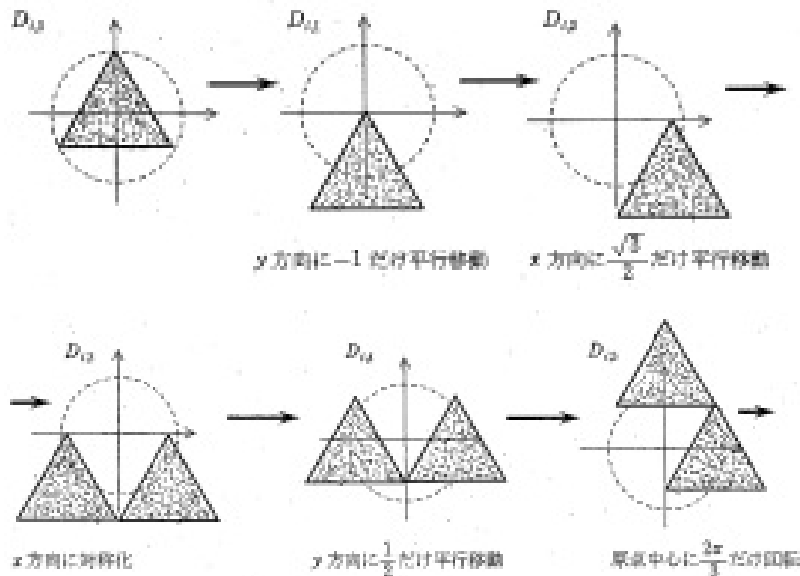
内部を含む最初の三角形 D_0 の方程式 $f_{0,0}(x, y) = 0$ は

$$D_0 : \left| \sqrt{3}y + |x| + |x| - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}} \right| + \left| \sqrt{3}y + |x| + |x| - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{3}} \right| = 0 \quad (4)$$

である。

D_0 を出発点として、辺の長さが半分の逆三角形を取り除く操作によって、図形の状態が D_i から D_{i+1} に至る過程に着目しよう。

対称化法を用いて表すために、周囲だけに着目して、操作手順を分解する。それに対応して形や位置や大きさが変化する様子を図形とそれに対応する式を表示して考える。初めに、図形の操作手順による変化を番号付けして示す。



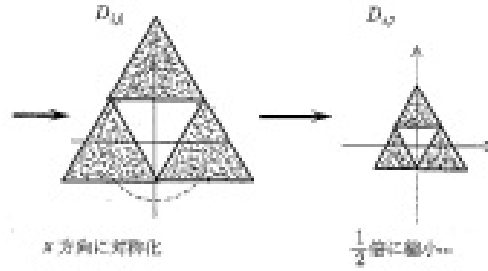


図 13

図形 $D_{i,0}$ を表す方程式を $f_{i,0}(x, y) = 0$ とすると, $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ のとき, $D_{i,j}$ を表す方程式 $f_{i,j}(x, y) = 0$ は, それぞれ

$$\begin{aligned}
 D_{i,1} \quad & f_{i,1}(x, y) = f_{i,0}(x, y+1) = 0 \\
 D_{i,2} \quad & f_{i,2}(x, y) = f_{i,1}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y\right) = 0 \\
 D_{i,3} \quad & f_{i,3}(x, y) = f_{i,2}(|x|, y) = 0 \\
 D_{i,4} \quad & f_{i,4}(x, y) = f_{i,3}\left(x, y - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (5) \\
 D_{i,5} \quad & f_{i,5}(x, y) = f_{i,4}\left(\frac{-x + \sqrt{3}y}{2}, \frac{-\sqrt{3}x - y}{2}\right) = 0 \\
 D_{i,6} \quad & f_{i,6}(x, y) = f_{i,5}(|x|, y) = 0 \\
 D_{i+1,0} = D_{i,7} \quad & f_{i,7}(x, y) = f_{i,6}(2x, 2y) = 0
 \end{aligned}$$

となる。

上のような代入の過程は, 得られる式が次第に複雑化するので, むしろ, 代入する指示のみを記す方が正確に間違いなく伝えることができる。そこで, 一般に次のような操作を考える。

ある方程式 $f(x, y, z) = 0$ の各文字 x, y, z をそれぞれ $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)$ に置き換えて, $f(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) = 0$ とする操作を

$$[f(x, y, z) = 0] \Xi \left| \begin{array}{l} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{array} \right| (*) \quad (6)$$

と表し, Ξ 変換 と名付ける。

このような代入を繰り返す場合は右肩にその反復回数 n を記す。あるいは次に新たな代入をする場合は, 上の式 (*) における最右端にある | のさらに右方に各文字に代入する式を 3 行に分けて, その順序に書き込む。

Ξ 変換を用いて表せば

$$[f_{n,0}(x, y) = 0] = [f_{0,0}(x, y) = 0] \Xi \left| \begin{array}{l} x \\ y+1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} |x| \\ y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \frac{-x + \sqrt{3}y}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}x - y}{2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} |x| \\ y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 2x \\ 2y \end{array} \right| \quad (7)$$

となる。

$n = 1, 2, 3$ に対して, 具体的にその式の形を求めてみる。

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{3} \left(-\sqrt{3}|x| - y + \frac{1}{2} \right) + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right| + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{3}|x| - y + \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \right. \\ & + \left. \left| \sqrt{3} \left(-\sqrt{3}|x| - y + \frac{1}{2} \right) + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right| + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right| \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{3}|x| - y + \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

上の式を整理すると、次のように D_1 を表す方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left| -3|x| - \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right| \\ & + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| x + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) y - \frac{5\sqrt{3}}{6} \right| \\ & + \left| -3|x| - \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \right| \\ & + \left| -|x| + \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ & + \left| x + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) y - \frac{5\sqrt{3}}{6} \right| = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

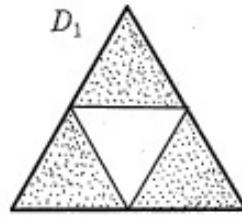


図 14

三変換を用いるとシェルピンスキーのギャスケットの方程式を表すことができる。一連の操作が n 回行われた後の方程式は、次のようになる。

$$[f_{n,0}(x, y) = 0] = [f_{0,0}(x, y) = 0] \Xi \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & x - \frac{\sqrt{3}}{2} & |x| & \frac{-x + \sqrt{3}y}{2} & |x| & 2x \\ y + 1 & y & y & \frac{-\sqrt{3}x - y}{2} & y & 2y \end{array} \right)^n \quad (10)$$

上の式における n の極限 $n \rightarrow \infty$ をとれば、一応式の上でシェルピンスキーのギャスケットの方程式の表現式が得られるわけである。これを底面あるいは断面とする立体の方程式をつることができる。

4 くり抜き立方体の方程式

立方体の各面をその辺の $\frac{1}{3}$ の長さの正方形の穴をくり抜いてできる右図のような立体を作る。一見すると、その方程式を求めることは無謀に思える。しかしながら、対称化法を用いると、簡単に目的を達成することができるのである。

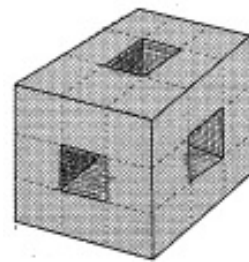


図 15

操作手順を対応する図形と方程式を並列させ、番号付けすることで表そう。

- [1] まず、断面が1辺の長さ1の正方形である高さ ∞ の柱を用意する。(図 16)

$$|x + y| + |-x + y| = 1 \quad \textcircled{1}$$

これを x 軸方向に1だけ平行移動し、さらに y 軸の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、 x 方向の対称化を行う。(図 17)

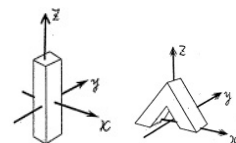


図 16

図 17

$$||x| + z + \sqrt{2}y - \sqrt{2}| + | -|x| - z + \sqrt{2}y + \sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

②

さらに y 軸の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, y 軸方向に $-\frac{1}{2}$, z 軸方向に $-\frac{3}{2}$ だけ平行移動する。(図 18)

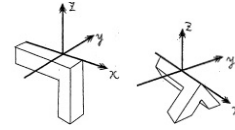


図 18

図 19

x 軸の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, y 方向の対称化を行う。

(図 19)

すると, 互いに垂直な三叉状の立体ができる。これを x 軸の周りに $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, y 軸方向に $\frac{3}{2}$, z 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動する。(図 20)

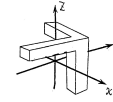


図 20

最後に x, y, z 方向の対称化を行えばよい。すると, くり抜き立方体の方程式が得られる。(図 15)

$$\begin{aligned} & \left| 2|x| + ||y| - |z|| - |y| - |z| \right| + 2|x| + ||y| - |z|| + 3|y| + 3|z| - 8 \\ & + \left| -2|x| + ||y| - |z|| - |y| - |z| \right| - 2|x| + 3|y| - |z| + |y| + |z| \right| = 4 \end{aligned}$$