高校数学における定理の証明についての一考察

−余弦定理の導入を例として−

泉高等学校　吉田 圭介 *

1　はじめに

ここ数年，数学教員を目指す大学の教職課程の講義を担当するようになって，学生諸君の数学に対する考え方に対して危惧に近い感情を持ってしまうことが少なからずあるようになりました。彼らの多くは「公式は覚えるものであり，問題は解ければ良い。」という，恐ろしいまでに強固な固定観念に取り付かれているように感じられ，彼らにとっては「数学が出来る＝問題が解ける」であり，この 2 つの事柄は完全に同値であると認識されているように感じられました。また，前任校で数学の教員 (昨年度は大学では数学に関する教職課程を担当していましたが，高校では情報担当で数学の授業は持っていませんでした。) との指導内容についての雑談の中で，三角比について話していたとき，「定理や公式はもちろんちゃんと証明して説明しているけど，結局，ほとんどの生徒が暗記しているだけでしょうね。」というような話がでました。そこで，生徒にとっての「主体的・対話的で深い学び」の実現に向け，定理や公式は暗記するものではないという意識を生徒に持たせるために，私なりに考え実践を試みた事をまとめました。

2　余弦定理の各教科書での扱い

平成 27 年 9 月 14 日 (月) 中央教育審議会初等中等教育分科会 (第 100 回) の配付資料「新しい学習指導要領等が目指す姿」には「幼小，小中，中高の学びの連携・接続についても，学校段階ごとの特徴を踏まえつつ，前の学校段階での教育が次の段階で生かされるよう，学びの連続性が確保されることが重要である。」と書かれています。多くの数学 I の教科書では，三角形の合同条件など，中学校での学びに全く触れることなく「△ABC において，次の余弦定理が成り立つ」といきなり余弦定理が提示され，証明が「簡潔に」記載されている形になっています。余弦定理の導入部分の各教科書の具体的な例を簡単に分類すると

一番簡潔で，割と多いのが ⇒ 新編　数学 I（東京書籍）
「三角形の 1 つの角と 3 辺の長さとの間に，次の余弦定理が成り立つ。」
証明　座標平面上に三角形を置いて 1 パターンのみ。最後に「①は，A,B のどちらかが直角または鈍角のときも成り立つ。」と追加記述あり。

* 東邦大学理学部教職課程非常勤講師

ほんの少しだけ，考える姿勢（？）を見せているのが ⇒ 高等学校　数学 I（第一学習社）
「三角形の 3 辺と 1 つの内角の関係について調べてみよう。」
証明　座標平面上に三角形を置いて 3 パターン。

より具体的に考える方向を示しているのが
「三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっているとき，残りの辺の長さを求めることを考えよう。」⇒ 最新　数学 I（数研出版）
証明　∠A が鋭角と鈍角の場合の 2 パターン。証明の後，「B が鈍角，A が直角の場合も，成り立つ」と追加記述あり。
「三角形において，2 辺の長さと，その間の角の大きさが与えられたとき，残りの 1 辺の長さを求めてみよう。」⇒ 新編　数学 I（第一学習社）
証明　鋭角三角形の場合のみ（「これは ∠A が直角，鈍角であるときも成り立つ。」と追加記述あり。）

そして，三平方の定理との関連に触れているのが ⇒ 新版　数学 I（実教出版）
「直角三角形では，三平方の定理が成り立つ。ここでは，鋭角三角形や鈍角三角形において，辺と角のあいだにどのような関係があるか考えてみよう。」
証明　∠A が鋭角のパターンのみ。証明の後，鈍角三角形の図があり，「∠A が鈍角の三角形においても①の式が得られる。」と追加記述あり。

等々，教科書会社によって，また，その教科書の性質によって様々な，ある程度の工夫は見られますが，中学校で学んだ三角形の合同条件から，「三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっていれば，残りの辺の長さを求めることが出来る。」筈だという予測を立ててから説明している教科書は見当たりません。「三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさが決まる ⇒ 三角形の決定 ⇒ 残りの辺の長さも決まるので求まる筈」という，ごく当たり前の初歩的な論理的思考を何故入れないのかが不思議です。そして，殆どの教科書が導入の短い説明の後，すぐに普通の鋭角三角形，鈍角三角形で，鋭角を挟む 2 辺がわかっている場合，鈍角を挟む 2 辺がわかっている場合の 3 つの場合について「証明」しています。教科書によっては 2 つの場合で済ませているものや，鈍角の場合も同様に成り立つと記して，図は 1 つという教科書もあります。私が見た範囲では，唯一，実教の新版数学 I のみが，まず，「AB=5，AC=8，A=60° の △ABC において，辺 BC の長さを求めてみよう」という，具体的例題を解いてから，証明に入っています。

無論，授業は教科書を「使って」実施されるものですから，教科書に書いてあろうがなかろうが，各先生方はそれぞれ様々な工夫をなさって授業実践されているのは当然のことですし，その中で，三平方の定理との関連に触れる先生もいらっしゃるでしょうし，教科書の証明が不足していれば，きちんと正確に 3 つのパターンの図を描いて証明されている先生もいらっしゃると思います。

ただ，現実問題として，高校の数学の授業を受けて，大学生になり，将来数学の教員を目指す学生諸君の多くが，それらの様々な工夫の成果を身に付けることなく，余弦定理を含め，定理や公式は暗記すればよいと思ってしまっていることが問題だと思うのです。

3　直感的理解に留意した指導例について

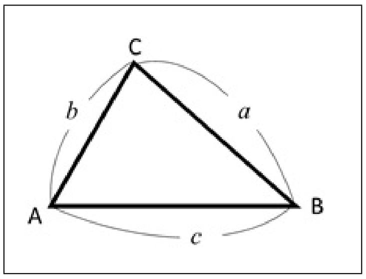

図 1

皆さんは高校で初めて余弦定理を学んだ時，どのような指導を受けたでしょうか。私の場合，余りに遠い昔の事なので，多少の記憶違いもあると思いますが，まず最初に三角形の 3 つの角を大文字の A, B, C で表す時，その角に向かい合った辺の長さを小文字の a, b, c で表す(図 1) という前提を覚えてから(これを覚えていなければ，確かに公式を暗記しても使えません)，余弦定理を「暗記」したような記憶があります。勿論，授業で証明はあったと思いますが，理解できなかったのか，聞いていなかったのか記憶にはありません。しかし，余弦定理を理解する上で，この A，B，C などの文字はどうでもよいことは明らかです。

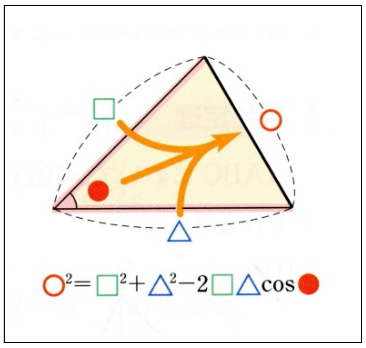

図 2

図 2 は数研出版最新数学 I より引用したもの[1]ですが，要するに直感的にはこの図の形で意味を理解できれば良い訳です。勿論，教科書に図がなくとも私自身も含め，同様な図を板書して生徒が理解し易くなるように工夫されている先生が殆どだと思います。しかし，この部分はこの定理を使う上での工夫であり，「意味」を理解しやすくする工夫ではありません。私は，生徒にとって，「意味」を理解し辛くさせている要因は，教師の側の「証明」の正確さ，厳密さに拘る数学教師としての当然の姿勢にもあるような気がしているのです。極端なことを言えば，最初は「証明」になっていなくても良いので，取り合えず，公式や定理を導き出して理解させ，必要に応じて，厳密にいえば，これは一例を示しているに過ぎないので，という形で，生徒が理解してから，後から本当の意味での「証明」をするのでも良いと思うのです。私のような工学部出身者ではなく，純粋に数学的思考を好まれる方にとっては，厳密な証明に拘らない，この直感的理解を重視する考え方は受け入れ難いのかもしれません。しかし，その学校の生徒の習熟度に大きく左右はされますが，大多数の生徒がその内容を理解する事ができず，結果的に内容の理解よりも，公式の丸暗記とその使い方，そして，何よりもテストで点が取れれば良いという方向に考えてしまうようになることは，やはり不幸な事だと思います。そういう意味で，ある意味，大胆で厳密でない考えの私が，教科「情報」の問題解決の単元の中で，余弦定理について直感的に，しかし，ただ式を暗記するのではない理解を狙って行った実践例を以下にまとめてみました。対象生徒は既に余弦定理を学んではいるが，殆どは暗記しているだけという状況でした。

4　問題解決の具体例としての余弦定理

「社会と情報」の問題解決の授業の中で，数学の問題を解く事も当然問題解決に含まれるという話から入りました。授業はスライドを用いて行ったので，授業で用いたスライドを中心に

[1] 数研出版 最新数学 I 132 ページ

説明します。

(1)　三平方の定理の確認とその発展として，間の角が直角でない場合はどうすれば良いか，考えてみることから始めます（図 3）。

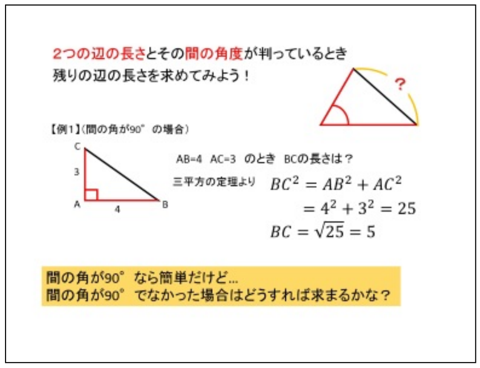

図 3

(2)　今回は三角比として正弦 $(\sin\theta)$ と余弦 $(\cos\theta)$ を使うため，そもそもそれらの理解が確実でないと始まらないので，まず，その確認です（図 4）。

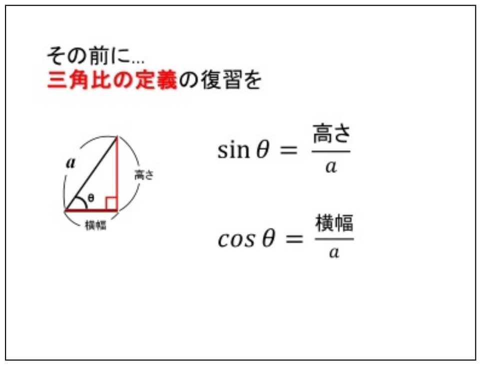

図 4

次に三角比の定義が確認できたら，三角形で「高さ＝ 斜辺 $\times \sin\theta$」「横幅＝ 斜辺 $\times \cos\theta$」に違和感なく気付くことが極めて重要なので，その確認です（図 5）。

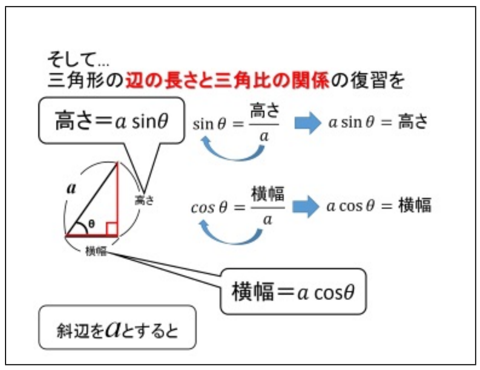

図 5

(3)　少なくとも，普通なら一番よく知られている三角比の公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を図形的な意味からも再確認しておくことは重要です。

また，この理解から斜辺の長さが a のときの「横幅」が「$a \cdot \cos\theta$」,「高さ」が「$a \cdot \sin\theta$」であることをすぐに使えるようになります（図 6）。

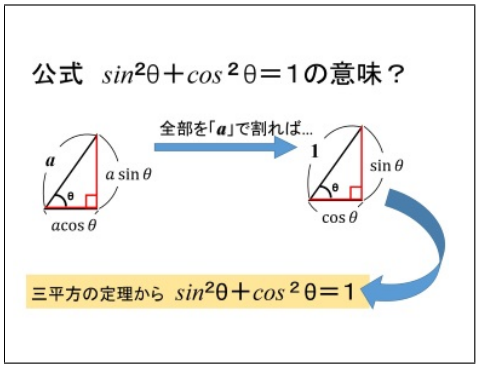

図 6

(4)　図では式が並んでしまっていますが，アニメーションを使い，式や図は説明の順に表示し，図のどこの長さがどの式かを丁寧にたどれるように工夫しました。

計算そのものはごく普通です（図 7）。

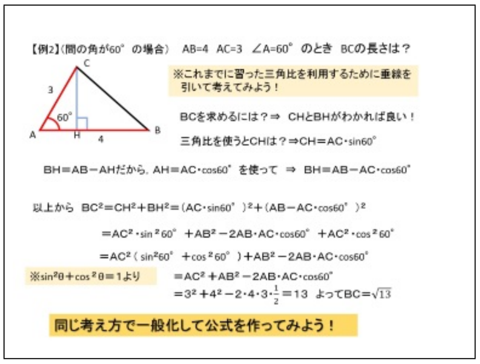

図 7

(5)　今度は長さや角を文字で表して長さを求めます。つまり，ここで「公式を作る」ことになります。まずは，∠A が鋭角の場合で考えます。

高さが 斜辺 × sinA，横幅が 斜辺 × cosA という基本事項が判っていれば CH と AH は容易に b と sinA，cosA で表せます（図 8）。

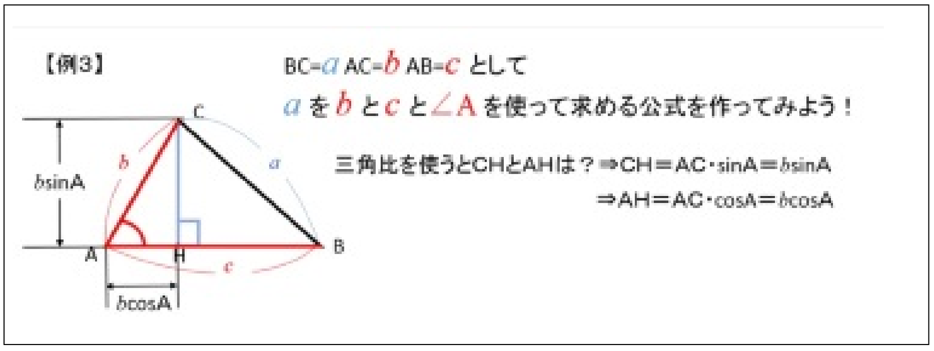

図 8

そして，求める a^2 は三平方の定理から CH と BH の 2 乗の和です。

CH は既に判っているし，BH=AB-AH で求められるので（図 9），この辺りを理解していれば困難なく結論にたどり着けます（図 10）。

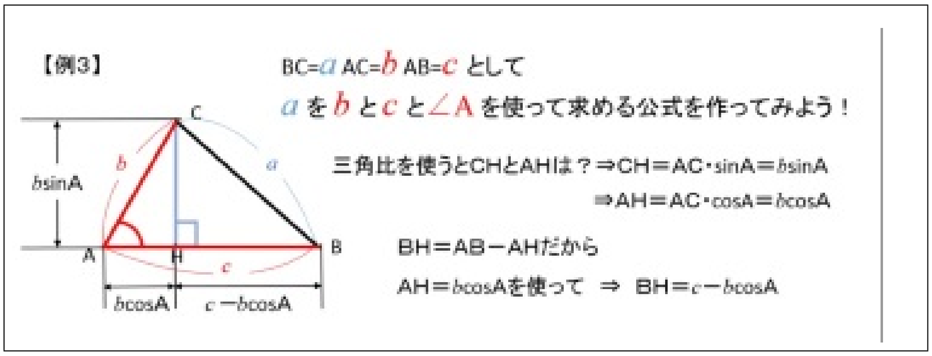

図 9

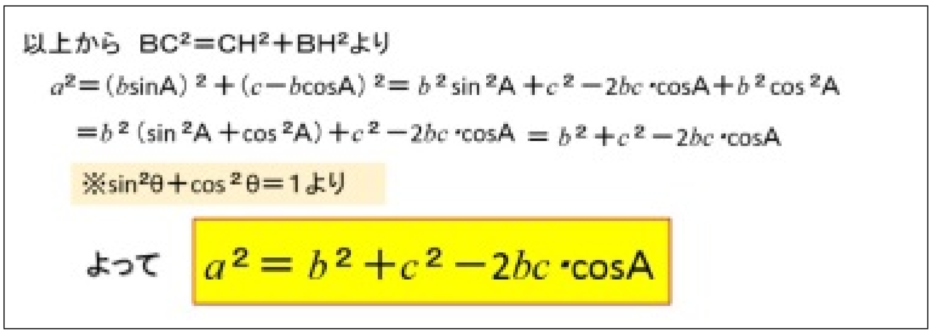

図 10

(6)　余弦定理などの数学の定理を「暗記しているだけ」では無意味，というより，有害ですらあると私は思っています。公式や定理の意味を理解してこそ使えるようになることを認識することが大切なので，このような，直観に訴える理解方法も無駄ではないと思っています（図 11）。

「鈍角」の場合は「cosA がマイナス」になります。このことが，鈍角のときに長さは長くなるが式はマイナスであることと整合性を持つ訳です（図 12）。

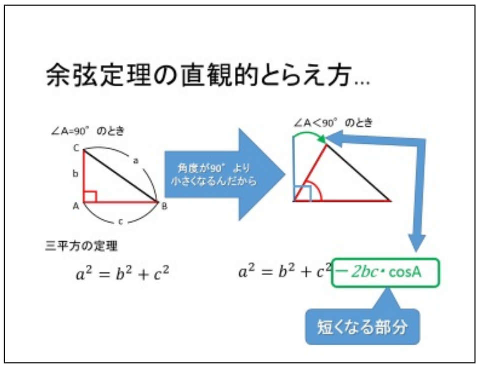

図 11

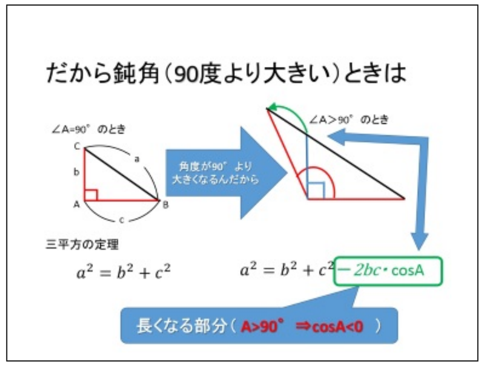

図 12

5　おわりに

それぞれの図はスライドを単純にコピーしたものですが，実際の授業ではアニメーションを使い，より生徒が理解しやすいように工夫して授業を行いました。考え方によっては単なる自己満足とも言えますが，何かの参考になれば幸いです。なお，加法定理についても，スライドを作成しましたので，参考までに最後に示します。

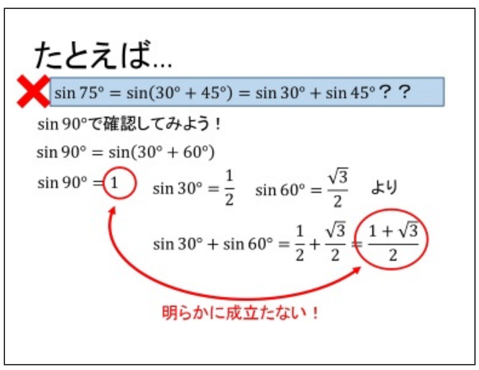

図 13

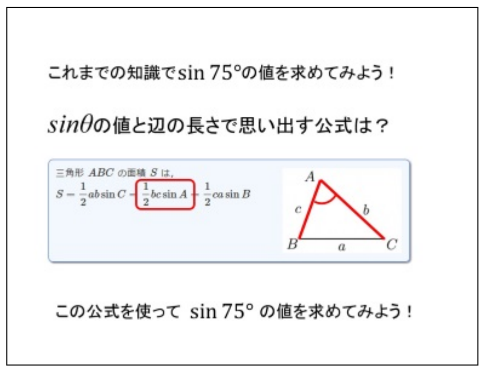

図 14

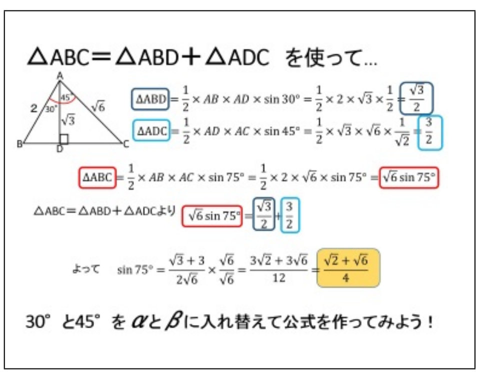

図 15

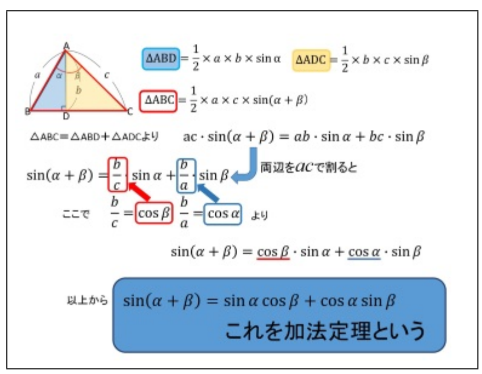

図 16