$0^0 = 1$

柏陵高等学校　広川 久晴

1　はじめに

もう 30 年も昔，2600 桁の整数を処理できる UBASIC というソフトがありました。そのマニュアルには `0^0=1` と書かれていました。それを見て「おや」と思ったことが，この原稿を書くきっかけです。それ以来何度か計算上で 0^0 が出たことがあり，その時はすべて $0^0 = 1$ でした。私も今は $0^0 = 1$ がよいと考えています。数学の世界では 0^0 は定義しないことになっています。現在 Excel で 「`=0^0`」と入力すると $\sqrt{-1}$ と同じように `#NUM!` と返されます。`#NUM!`は，数値がまずい，ということです。他の研究で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$　となることを知りましたが，ここでは私が遭遇した数値計算を紹介します。

2　微分係数

$f(x) = x$ の $x = 0$ における微分係数は，$f'(0) = 1$ です。

一方，$(x^n)' = nx^{n-1}$ の公式に機械的に当てはめると $(x^1)' = 1x^0 = x^0$ でもあります。導関数を x^0 と書くと，その定義域は $x \neq 0$ となってしまいますが，$x = 0$ における微分係数を定義に従って求めれば $f'(0) = 1$ なので，$0^0 = 1$ であればつじつまがあいます。

3　定積分

$\displaystyle\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$ において，$\displaystyle\int_0^1 (1-x)\,dx = \int_0^1 1\cdot(1-x)\,dx$ と考えて，部分積分で求めてみます。$x \neq 1$ で，$(1-x)^0 = 1$ より形式的に変形して，

$$\int_0^1 1\cdot(1-x)\,dx = [x(1-x)]_0^1 + \int_0^1 x\cdot(1-x)^0\,dx = 0 + \int_0^1 x\cdot(1-x)^0\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(1-x)^0\right]_0^1$$

もともと値が $\dfrac{1}{2}$ であったので，$0^0 = 1$ であってくれれば，こちらもつじつまがあいます。

元々微分から出ているので前項の 0^0 と同じですが指数が $m,\ n$ で与えられているときなどに出る可能性があります。受験などで定積分の計算を多く行う生徒には「定積分で 0^0 が出たら 1 に置き換えてよい。」と教えておくと良いと思います。理由は 2（微分係数）を説明すればいいでしょう。

4　パスカルの三角形

自然数，と言うと高校では「1 から」ですが，0 から始めるという場合もあります。私の経験では 0 から始める場合が多いように思います。0 から始める自然数と 1 から始める自然数の使い分けですが，1 から始める自然数を正整数，0 から始める自然数を非負整数，とすれば誤解がないので私はこれで使い分けています。パスカルの三角形も「1　1」から始めないで下図のように「1」から始めるべきです。私の授業では「1」から始めています。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \cdots\cdots & (1+1)^0=1 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \cdots\cdots & (1+1)^1=2 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \cdots\cdots & (1+1)^2=4 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \cdots\cdots & (1+1)^3=8 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \cdots\cdots & (1+1)^4=16
\end{array}$$

各行の和は $(1+1)^n$ ですが，符号を交代にすると和は $(1-1)^n$ となり，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \cdots\cdots & (1-1)^0=1 \\
 & & & 1 & & -1 & & & & \cdots\cdots & (1-1)^1=0 \\
 & & 1 & & -2 & & 1 & & & \cdots\cdots & (1-1)^2=0 \\
 & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & & \cdots\cdots & (1-1)^3=0 \\
1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1 & \cdots\cdots & (1-1)^4=0
\end{array}$$

ここでも $0^0=1$ となっています。

5　行列

数学セミナー (参考 [1]) で以下の行列を見ました。

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1
\end{pmatrix}$$

ここでは i , j は非負整数とし，左上の位置を 0 行 0 列とします。行列の i 行 j 列目の要素を $a(i,\ j)$ で表します。また二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ と表します。さて行列の作り方は

(1) $a(i,\ 0)=1$

(2) $a(0,\ j)=0, \quad (j \geqq 1)$

(3) $a(i,\ j)=a(i-1,\ j-1)+(j+1)\times a(i-1,j), \quad (i,\ j \geqq 1)$

このとき $a(i\ ,j)$ を表す式は

$$a(i,j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^i$$

この $i,\ j$ に数値を代入し表に並べると，以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1^0 & 2^0-1^0 & \frac{1}{2}(3^0-2\cdot 2^0+1^0) & \frac{1}{6}(4^0-3\cdot 3^0+3\cdot 2^0-1^0) \\ 1^1 & 2^1-1^1 & \frac{1}{2}(3^1-2\cdot 2^1+1^1) & \frac{1}{6}(4^1-3\cdot 3^1+3\cdot 2^1-1^1) \\ 1^2 & 2^2-1^2 & \frac{1}{2}(3^2-2\cdot 2^2+1^2) & \frac{1}{6}(4^2-3\cdot 3^2+3\cdot 2^2-1^2) \\ 1^3 & 2^3-1^3 & \frac{1}{2}(3^3-2\cdot 2^3+1^3) & \frac{1}{6}(4^3-3\cdot 3^3+3\cdot 2^3-1^3) \\ 1^4 & 2^4-1^4 & \frac{1}{2}(3^4-2\cdot 2^4+1^4) & \frac{1}{6}(4^4-3\cdot 3^4+3\cdot 2^4-1^4) \end{pmatrix}$$

この数字の並びを見て美しいと思いませんか。これが元の行列のように，下三角行列（主対角線より上の成分がすべて 0）になるのも不思議です。

では証明してみましょう。行 i に関する帰納法となります。

命題

(1) $a(i,\ 0)=1$

(2) $a(0,\ j)=0, \quad (j \geqq 1)$

(3) $a(i,\ j)=a(i-1,\ j-1)+(j+1)\times a(i-1,j), \quad (i,\ j \geqq 1)$

で定まる行列の要素は

$$a(i,j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^i$$

で表される。

（証明）

I. $i=0$ のとき

右辺 $=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}(j-k+1)^0=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}=\frac{1}{j!}(1-1)^j=\frac{1}{j!}0^j$

(i) $j=0$ のとき，定義より 左辺 $=a(0,\ 0)=1$，右辺 $=\dfrac{1}{0!}0^0=1$

(ii) $j \geqq 1$ のとき，定義より 左辺 $=a(0,\ j)=0$，右辺 $=\dfrac{1}{j!}0^j=0$

$\therefore i=1$ のとき成り立つ。

II. $i-1$ のとき成り立つと仮定（ただし $i \geqq 1$ ）

つまり，

$$a(i-1,j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^{i-1}$$

であると仮定し i のときは，

(i) $j=0$ のとき，定義より 左辺 $=a(i,\ 0)=1$

$j=k=0$ のとき右辺内の $(j-k+1)^i$ の部分は i の値によらず 1 なので，

右辺 $=\dfrac{1}{0!}(-1)^0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot 1=1$

(ii) $j \geqq 1$ のとき，左辺 $=a(i,\ j)=a(i-1,\ j-1)+(j+1)a(i-1,\ j)$

仮定より

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{(j-1)!}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\binom{j-1}{k}(j-k)^{i-1} \\
&\quad + (j+1)\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^{i-1} \\
&= \frac{j}{j!}\sum_{m=1}^{j}(-1)^{m-1}\binom{j-1}{m-1}(j-m+1)^{i-1} \qquad k=m-1\text{で変換} \\
&\quad + \frac{j+1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^{i-1} \\
&= \frac{j}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k-1}\binom{j-1}{k-1}(j-k+1)^{i-1} \qquad m=k\text{に置き換え} \quad \binom{j-1}{-1}=0 \\
&\quad + \frac{j+1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^{i-1} \\
&= \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\left\{(j+1)\binom{j}{k}-j\binom{j-1}{k-1}\right\}(j-k+1)^{i-1} \\
&= \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k(j+1-k)\binom{j}{k}(j-k+1)^{i-1} \\
&= \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^{i}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (i), (ii) より i のときも成り立つ。

I. II. より，すべての自然数 i について成り立つ。　証明終

しっかり $0^0=1$ が活躍しています。0 行目は $n^0=1$ を代入すればパスカルの三角形で符号を交代にすることと同じです。1 行目以降は，$i<j$ 　ならば $a(i-1,\ j-1)=0$，$a(i-1,\ j)=0$ から帰納的に当然ですが直接式変形で

$i<j$ 　ならば $a(i,\ j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^i=0$，かつ $i \geqq j$ ならば $a(i,\ j)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k+1)^i>0$ を導けないでしょうか。

6　おわりに

いろいろな問題を解きながら数学を楽しんでいます。時折と言っても 10 年に 1 度程ですが，定積分や二項係数に関わる計算の途中で $0^0=1$ が出現しました。そんな私の経験をお伝えしました。

参考文献

[1] 今井貞三，「エレガントな解答を求む」，数学セミナー，第 57 巻，第 3 号，p.6，March, 2018.