「ガロア理論」と高校数学　その3

— 3 次方程式の対称性を崩せ —

千葉商業高等学校　島上 直人

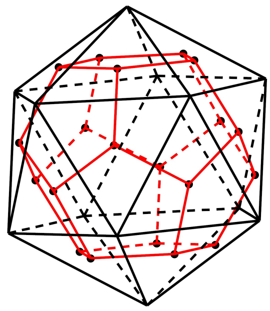
1　はじめに

本稿は $\alpha-\omega$ 第 53 号 (2015 年)『ガロア理論と高校数学 —2 次方程式を用いてガロア理論を読み解く —』および，$\alpha-\omega$ 第 55 号 (2017 年)『ガロア理論と高校数学その 2 —ギリシャ三大問題の解決と正多角形の作図 —』の続編である。 数学の理論の中でも難解と言われるガロア[1]理論は，2000 年来のギリシャ三大作図問題を解決し，自然科学を中心に様々な分野で応用されている。前稿においては，高校数学の中から見えてくるガロア理論について焦点を当てたが，本稿においてはガロア理論の成立に多大な影響を及ぼしたラグランジュ[2]の対称性理論からの高校数学を垣間みようとする試みである。ガロアが証明したことは，

5 次以上の代数方程式には解の公式が存在しない

である。つまり，「2 次，3 次，4 次方程式は加減乗除（四則演算）と平方根（2 乗根），立方根（3 乗根）などの冪根をとる操作で解を求めることはできるが，5 次以上の方程式ではそのような操作で解を得ることはできない。[3]」ということである。授業中に「2 次方程式の解の公式」や「因数定理による高次方程式の解法」の際には必ず余談で触れている。

2 次方程式の対称性[4]は，対称式 $(\alpha-\beta)^2$ に冪根を取ることによって簡単に崩せた。これを「線対称」と捉えると，3 次方程式の対称性は「正三角形」，4 次方程式の対称性は「立方体」，5 次方程式の対称性は「正 20 面体」との関連が見えてくる。



正 20 面体と正 12 面体は双対立体であり，5 次交代群 $A\,(5)$ の対称性である。

数学 A「空間図形」の正多面体での授業では，正 12 面体や正 20 面体を眺めながら，5 次方程式の解の公式について話題にする。「ガロア理論は 5 次方程式以上の代数方程式には解の公式がないことを証明したんだけど，ガロア理論などの抽象代数によって，ギリシャ三大作図問題が解決したんだ。フェリックス・クライン[5]は，古代ギリシャのプラトン[6]立体の対称性を使って 5 次以上の

[1] Évariste Galois(1811-1832) フランスの数学者，革命家，群論をはじめとする抽象代数を創始した。
[2] Joseph-Louis Lagrange(1736-1813) 数学者，天文学者である。オイラーと並んで 18 世紀最大の数学者といわれている。平均値の定理を発案
[3] アーベル,Niels Henrik Abel(1802-1829)　ノルウェイの数学者もほぼ同時期に証明している。
[4] 本稿では，方程式の係数が解の入れ換えについて対称であることを，方程式の対称性と称している。

代数方程式に解の公式が存在しないことを示したんだよ。」と話すと，「図形と方程式が密接に関係しているのは不思議だなぁ」などの感想を受けることが多くある。これらの疑問に対して教材開発を試みたものである。

今回は前回でとりあげた「カルダノの公式」とは別の角度で 3 次方程式を考察していこう。3 次方程式の対称性を崩しながら解を得る過程を観察することにより，4 次方程式にその方法を適用できる。さらに 5 次以上の方程式は対称性が崩せないことに繋がるのだ。

2　解と係数の関係

2 次方程式の解の公式の存在の証明では，2 次体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の自己同型で不変となるものが有理数であることが重要であった。それから，実際に自己同型で不変になる式 $(\alpha-\beta)^2$ の平方根をとることと，解と係数の関係 $\alpha+\beta$ により対称性を崩した。ここで今一度，高等学校数学 II における解と係数の関係についての記述を確認してみよう。「新編数学 II 改訂版（実教出版）」より，

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

次の問題を解いてみよう。

問 1　2 次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha+2)(\beta+2)$　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3) $(\alpha-\beta)^2$　　(4) $\alpha^3-\beta^3$

生徒には「2 次方程式には解の公式があるから，この問題は解を求めれば済むことなのに，なんでわざわざ解と係数の関係なんて使うんだろう。」と問いかけることがある。解と係数の関係はジラール[7)]の発想で全ての対称式が基本対称式の加減乗除によって表現することができることが方程式論を発展させた。問 1(3)$(\alpha-\beta)^2$ は対称式であり，自己同型で不変になる有理数であるから，平方根を取ることによって対称性を崩せるのだ[8)]。基本対称式と対称式について詳しく考察しよう。

---

5) Felix Christian Klein(1849-1925) ドイツの数学者。群論と幾何学との関係，関数論などの発展に寄与した。クラインの壺の考案者。

6) Plato(B.C.427-B.C.347) 古代ギリシアの哲学者。ソクラテスの弟子にして，アリストテレスの師。プラトンの思想は西洋哲学の主要な源流である。5 個の正多面体を「プラトン立体」と呼ぶ。作図を定規とコンパスのみによると制限した。

7) Albert Girard(1595-1632) フランスの数学者。方程式の解と係数の関係の「ジラールの定理」が有名。

8) $\alpha-\beta$ を 2 次のラグランジュ・リゾルベントと呼ぶ。

定義 1　基本対称式
いくつか数があったとするとき，

- 1 次基本対称式：その数すべての和
- 2 次基本対称式：二つずつのすべての組み合わせの積のすべての和
- n 次基本対称式：n 個ずつのすべての組み合わせの積のすべての和

例 1　2 数 α, β の基本対称式は $\alpha + \beta, \alpha\beta$

問 2　3 数 α, β, γ の基本対称式をいえ。

定理 1　解と係数の関係（ジラールの定理）

x の係数が 1 の n 次方程式において，n 個の解 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ とする。そのとき，

- x^{n-1} の係数は　$-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$
- x^{n-2} の係数は　$\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}^{n} a_i a_j$
- x^{n-3} の係数は　$-\displaystyle\sum_{1\leq i,j,k\leq n}^{n} a_i a_j a_k$
- x^{n-p} の係数は　$(-1)^p \displaystyle\sum_{1\leq i_1,i_2,\cdots,i_p\leq n}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}$
- 定数項は　$(-1)^n\, a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n$

証明は簡単なので省略する。ただし，n 次方程式には本当に n 個の解があるのかどうかは重要なことであるが，ジラールは言及していない。「n 次方程式には n 個の解がある」ことに対し，ライプニッツ[9]からオイラーへと受け継がれ「代数学の基本定理」と呼ばれるようになった。ただし，オイラー[10]の証明は「仮の証明」と言われている。その後，ラグランジュ，ガウス[11]と引き継がれかなり満足のいく証明にはなったが，「複素数とは何か」「実数とは何か」という問題を完全にクリアするにはカントール[12]とデデキント[13]が実数をちゃんと定義した 19 世紀後半になってようやく厳密な証明が完成した[14]。

---

9) Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716) 微積分法の確立，記号論理学の創始者。

10) Leonhard Euler(1707-1783)18 世紀の最大の数学者。「数学の巨人」と言われる。枚挙に渡る研究は近現代の数学の厳密化・抽象化時代の礎を築いた。

11) Carolus Fridericus Gauss(1777-1855) ドイツの数学者，天文学者，物理学者。研究は広範囲に及んでおり，特に近代数学のほとんどの分野に影響を与えた。

12) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845-1918) ドイツで活躍した数学者。集合論の創始者。

13) Julius Wilhelm Richard Dedekind(1831-1916) ドイツの数学者。代数学・数論。デデキント切断。

14) 証明は https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/activity/documents/tsuji.pdf を参照のこと。

定理 2　代数学の基本定理
複素数 $\mathbf{C}$ を係数に持つ n 次方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ は複素数 $\mathbf{C}$ の範囲の中で，重複も含めて必ず n 個の解を持つ。すなわち，
$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{C}$ とするとき，

$$\begin{aligned} &a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \\ &\quad = a_n\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)\cdots\left(x-r_n\right) \end{aligned}$$

となる $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbf{C}$ が存在する。

問 3　3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解 α, β, γ と係数の関係をいえ。

対称性

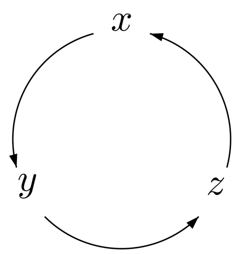
対称とは「操作で不変なこと」と定めた。こう決めることによって，目では見えない抽象的な対称性も射程に入れることができる。その操作の例として x, y, z という三つの変数であらわされた数式に対して「変数を入れ替える」という操作を考えてみる。

問 4　x, y を入れ替える操作を次の式に適用せよ。（不変である）（不変でない）

(1) 例 $xy^2z^3 \to x^2yz^3$（不変でない）　(2) $xyz \to$
(3) $xy+yz+zx \to$　(4) $x^2y+y^2z+z^2x \to$

問 5　x を y，y を z，z を x に入れ替えるサイクリックな操作を次の式に適用せよ。

(1) 例 $xy^2z^3 \to x^3yz^2$（不変でない）　(2) $xyz \to$
(3) $xy+yz+zx \to$　(4) $x^2y+y^2z+z^2x \to$



x を y，y を z，z を x に入れ替えるサイクリックな操作[15)]とは右図のように入れ替えること。問 4(3) と問 5(4) の結果に注目しよう。x, y を入れ替える操作では $x^2y+y^2z+z^2x \to xy^2+yz^2+zx^2$ より，不変でないが，x を y，y を z，z を x に入れ替える操作においては $x^2y+y^2z+z^2x \to x^2y+y^2z+z^2x$ となり不変になる。つまり，x, y, z の入れ替えによって不変になるかならないかが決まるのである。

x, y, z の入れ替えは 6 個（$3!=6$）あり，問 4(1) 問 5(1) にある xy^2z^3 は，恒等置換を除くどの入れ替えでも不変にはならないから「対称」とは言えないであろう。$x^2y+y^2z+z^2x$ は 6 個の入れ替えのうち不変になったりならなかったりすることについて考えてみよう。ヒントは 2 次方程式の解と係数の関係において $\beta-\alpha$ は対称ではなかったが 2 乗した $(\beta-\alpha)^2$ は対称になったことである。

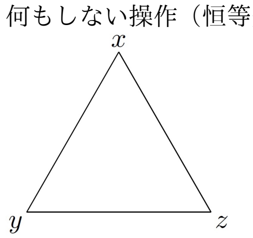
15) 群論での表現は「巡回群 $C(3)$」

正三角形の対称移動[16)]

ここで，正三角形の対称移動について考えてみよう。群論においては 3 次二面体群 $D\,(3)$ と呼ばれるもので 3 次方程式と密接な関係がある。正三角形の頂点を x, y, z とし，頂点がどう動いたかに応じて変数を入れ替えてみよう。

問 6　正三角形を回転したり裏返ししたりする操作が x, y, z を入れ替える。例として xy^2+z がどのような式に移されるか考えてみよう。空欄を埋めよ。

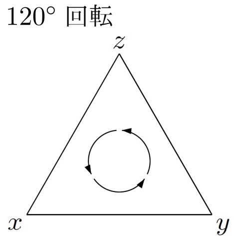
何もしない操作（恒等変換）



何もしない操作も，ひとつの操作とするすなわち

$$xy^2+z \to xy^2+z$$

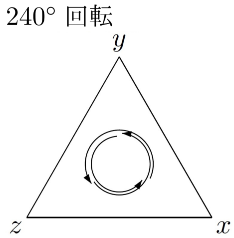
120° 回転



x が y のあった場所へ，y が z のあった場所へ，z が x のあった場所へそれぞれ移動するので $x \to y \to z \to x$ という入れ替えとなる

$$xy^2+z \to (\qquad\qquad\qquad)$$

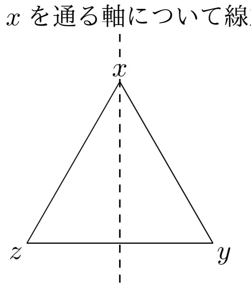
240° 回転



x が z のあった場所へ，y が x のあった場所へ，z が y のあった場所へそれぞれ移動するので $x \to z \to y \to x$ という入れ替えとなる

$$xy^2+z \to (\qquad\qquad\qquad)$$

x を通る軸について線対称

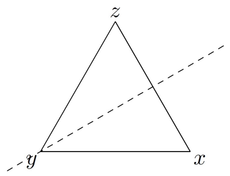


x はそのままで，y が z のあった場所へ，z が y のあった場所へそれぞれ移動するので $y \leftrightarrow z$

$$xy^2+z \to (\qquad\qquad\qquad)$$

16) 群論での表現は「二面体群 $D\,(3)$」

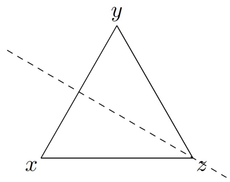
y を通る軸について線対称



y はそのままで，x が z のあった場所へ，z が x のあった場所へそれぞれ移動するので $x \leftrightarrow z$

$$xy^2 + z \to (\qquad\qquad\qquad)$$

z を通る軸について線対称



z はそのままで，x が y のあった場所へ，y が x のあった場所へそれぞれ移動するので $x \leftrightarrow y$

$$xy^2 + z \to (\qquad\qquad\qquad)$$

問 7　$x^2y + y^2z + z^2x$ について，正三角形の 6 つの対称移動についてどのような式に変換されるか答えよ。

- 恒等変換：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$
- $120°$ 回転：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$
- $240°$ 回転：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$
- x を通る軸について線対称：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$
- y を通る軸について線対称：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$
- z を通る軸について線対称：$x^2y + y^2z + z^2x \to (\qquad\qquad\qquad)$

$x^2y + y^2z + z^2x$ という式は，x, y, z を三頂点にもつ正三角形の対称性でいうと，恒等変換と $120°$ 回転と $240°$ 回転の三つの回転で不変となり，残りの裏表をひっくり返す入れ替えでは $xy^2 + yz^2 + zx^2$ になる。つまり $x^2y + y^2z + z^2x$ は完全に対称ではないので対称式と呼べないが，ある程度の対称性を持っているのである。

ラグランジュの「代数方程式の解についての考察」

ラグランジュは「代数方程式の解についての考察」にて対称式の基本定理を発表した。ただし，証明に関しては当たり前として省略してある。正確な証明に関しては脚注[17]を参照のこと。

> **定理 3**　ラグランジュの対称式の基本定理
>
> f は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数とする対称式とする。つまり，多項式 f は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をどのように入れ替えても不変となる式のことである。$s_1, s_2, \cdots, s_n$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の基本対称式とする。そのとき，f は $s_1, s_2, \cdots, s_n$ の式として表される。

ラグランジュの「代数方程式の解についての考察」の基本的アイデアは，これはで研究されてきた方程式の解の公式を「対称性」の視点から見つめ直すことにあった。この視点から見たとき，「方程式を解く」という行為がこれまでとは全然違う姿を見せ始めるのである。

[17] http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/H16-mukai.pdf

n 次方程式　$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

が与えられたとしよう。代数学の基本定理より，その n 個の解が求められるかどうかはともかくとして，解は確かに n 個ある。そこでラグランジュは次の二つのことに着目した。

(1) 解と係数の関係があるので方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ が与えられたということは，解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の基本対称式がすべて与えられたのと同じことである。

(2) 対称式の基本定理は基本対称式がすべて与えられたなら，それを使ってすべての対称式を作ることができるということである。しかし基本対称式と加減乗除しか使わないならば，対称式しか作ることは出来ない。理由は，対称式とは $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に入れ替えで不変な式のことだったので，そんな式どうしを足したり引いたり掛けたり割ったりしても，やはり入れ替えで不変になるからだ。ところが，解は対称式ではない。つまり，

ラグランジュの方程式論

解の公式を作るためには，基本対称式だけを材料にして，その対称性をうまく破壊して，対称でない式を作らなくてはならない。

対称式の観点から考えてみると，方程式の解の公式とは実に不思議なものである。つまり対称式だけを使って，その対称性をうまく破壊して，対称でない式を作り上げることこそが，解の公式の本質なのだとラグランジュは見抜いたのだ。

今一度，2 次方程式の対称性の崩しを確認してみよう。

問 8　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の二つの解を α, β とするとき，次の式を α, β で表せ。

(1) $\alpha + \beta =$　(2) $\alpha\beta =$　(3) $(\alpha + \beta)^2 =$　(4) $\alpha^2 + \beta^2 =$

(5) $(\alpha - \beta)^2 =$　(6) $\alpha - \beta =$　(7) $\alpha =$　(8) $\beta =$

$\alpha - \beta$ は対称式ではないが，α と β と入れ替えると $\beta - \alpha$ となり，-1 倍された状態になる。2 乗すると，その -1 倍が 1 倍となり $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ となり対称式になる。これは 2 次方程式の係数 a, b, c を使って表すことができる。このことが対称性を崩しているということなのだ。ラグランジュは 3 次方程式や 4 次方程式についても 3 乗根や平方根によって対称性が崩れていく様子を観察している。ここで，$\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)$ と $\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)^3$ について不変に保つ入れ替えを考えてみよう。

問 9　次の式における不変に保つ入れ換えを全て求めよ。

(1) $\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)$

(2) $\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)^3$

$\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)$ は正三角形の 6 個の入替のどれも不変にならないが $\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)^3$ は $\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)^3 = \left(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3\right) + 3\omega\left(\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha\right) + 3\omega^2\left(\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2\right) + 6\alpha\beta\gamma$ と展開され，$\left(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma\right)^3$ と $\alpha\beta\gamma$ は対称式であり，問 7 のとおり $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$ と $\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2$ は正三角形の線対称では対称式にならず，サイクリックな対称には不変とな

る[18)]。なお，$\left(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma\right)$ は 3 次のラグランジュの分解式（リゾルベント）と呼ばれる。2 次のラグランジュ・リゾルベントは $\alpha-\beta$ である。

3 差積

さて，方程式の対称性をぶち壊す準備がおおかた整った。次に差積を定義して 3 次方程式の対称性をぶち壊すぞ。

定義 2 方程式の差積

$x_1, x_1 \cdots, x_n$ のすべての対 x_i, x_j に対して $i<j$ として，差 x_i-x_j をとり，そのすべてをかけあわせたものである。

例 2 2 変数と 3 変数の差積

- 2 変数 x_1, x_2 の差積は x_1-x_2
- 3 変数 x_1, x_2, x_3 の差積は $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$

問 10 4 変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の差積を求めよ。

問 11 3 変数の差積 $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ を展開せよ。

この差積は対称式ではない。たとえば x_1 と x_2 を入れ替えて，差積がどう変化するか調べてみよう。展開せずに変数の差の積の形であらわしておいて，それぞれの項がどう変化するか調べる。まず (x_1-x_2) の項は，x_1 と x_2 が入れ替わるので，(x_2-x_1) になる，つまり (-1) 倍になる。一方，3 以上の各 k に対して，(x_1-x_k) は (x_2-x_k) に，逆に (x_2-x_k) は (x_1-x_k) になる。すなわち掛け算の順番が変わるだけなので，全部掛けてしまうと何もしなかったのと同じだ。よって (x_1-x_2) が (-1) 倍になった効果だけが残って，差積は (-1) 倍になることがわかる。一般にどの二つの変数を入れ替えても，やはり差積は (-1) 倍になる。

定義 3 偶置換と奇置換
差積を不変にする入れ替えのことを偶置換，差積が (-1) 倍になる入れ替えを奇置換と呼ぶ。

問 12 正三角形の 6 個の対称性を偶置換と奇置換に分類せよ。
(1) 恒等変換
(2) 120° 回転
(3) 240° 回転
(4) x を通る軸について線対称
(5) y を通る軸について線対称
(6) z を通る軸について線対称

[18)] 群論の表現では，二面体群 $D(3)$ における偶置換の正規部分群である巡回群 $C(3)$ においては不変となる。

奇置換を行ったあと x_1 と x_2 を入れ替えると偶置換になり，逆に偶置換を行ったあと x_1 と x_2 を入れ替えると奇置換になる。これによって偶置換と奇置換の間に 1 対 1 の対応がつけられるので奇置換と偶置換とは同じ個数であることもわかる。

この差積は，方程式の解の公式で重要な役割を果たす。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を解きたい n 次方程式の n 個の解とする。2 次方程式の場合は，差積 $\alpha - \beta$ を係数であらわすことで解の公式が得られた。一般の n 変数の方程式の場合も，差積はすべての入れ替えで不変というわけではないので対称式ではないが，入れ替えで不変になるか (-1) 倍になるかのどちらかである。よって差積の 2 乗は対称式になり，これは基本対称式によって方程式の係数によってあらわすことができる。

方程式の解の公式を作るとき，差積はいつでも対称式の平方根になるので，差積をとることによって対称性を崩そう。方程式の係数と差積を組み合わせて加減乗除によって作られる式は，一般に偶置換からなる対称性を持つ。よってその偶置換の対称性をさらに崩すことができるかを考えればよいのだ。

ラグランジュの対称性の考えで，3 次方程式の対称性を崩そう。この方法論を使うことで 4 次方程式の対称性はぶち壊すことはできるが，5 次方程式の対称性はぶち壊すことができないことがわかるのだ。

問 13　3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β, γ とするとき，次の式の値を a, b, c により表せ。

(1) $\alpha + \beta + \gamma =$

(2) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha =$

(3) $\alpha\beta\gamma =$

3 次方程式の対称性を壊す過程で必要になる対称式についてあらかじめ係数によって表しておこう。

問 14　3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β, γ とするとき，次の式の値を a, b, c により表せ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$

(2) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 =$

(3) $\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha =$

3 変数の差積の 2 乗を計算する。対称式になるから a, b, c で表すことができる。

問 15　3 次方程式の差積 $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ を a, b, c で表したい。次の問いに答えよ。

(1) $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$ を展開し，β と a, b により表せ。

(2) $(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ を展開し，γ と a, b により表せ。

(3) $(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$ を展開し，α と a, b により表せ。

(4) 差積の 2 乗 $\{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\}^2$ を

$\{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\}^2 = \{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)\}^2$ であることにより，展開したときの次の係数を求めよ。

(i) $\alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

(ii) $\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) =$

(iii) $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) =$

(iv) $\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=$
(v) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=$
(vi) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$
(vii) $\alpha+\beta+\gamma=$
(viii) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$
(ix) $\alpha\beta\gamma=$

(5) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ を a,b,c により表せ。

問 16　ω は 1 でない 1 の 3 乗根，つまり $\omega^2+\omega+1=0$ を満たすとする。また，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の 3 個の解 α,β,γ の差積を $D=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(i) 差積 $D=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ を展開せよ。
(ii) $\left(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma\right)^3$ を展開して，a,b,c,D により表せ。
(iii) $\left(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma\right)^3$ を展開して，a,b,c,D により表せ。
(iv) $(\alpha+\beta+\gamma)+\left(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma\right)+\left(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma\right)=3\alpha$ であることを利用して，3 次方程式の解の公式を作れ。
(v) $a=0,b=p,c=q$ として，(3) で求めた 3 次方程式の解の公式が「カルダノの公式[19]」と同じことを確認せよ。

4　まとめ

3 次方程式の対称性を崩すのは「正三角形の対称性[20]」を用いてその中の偶置換となる「恒等変換」「120° 回転」「240° 回転」[21] であった。4 次方程式の対称性を崩すのは，「立方体（正 8 面体でもよい）の対称性[22]」の偶置換である「正四面体の対称性[23]」を用いる。また 5 次方程式の対称性が崩せないのは，「5 個の変数の入れ替えの対称性[24]」の偶置換である「正 12 面体（正 20 面体でもよい）の対称性[25]」を用いるのだ。数学Ａ「空間図形」において 5 個の正多面体の授業をする際には触れたい内容である。ギリシャ三大作図問題の解決は 2000

[19] 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の解は，1 の 3 乗根を ω として，

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ &,\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ &,\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

[20] 群論での表現は二面体群 $D(3)$
[21] 群論での表現は巡回群 $C(3)$
[22] 群論での表現は 4 次対称群 $S(4)$
[23] 群論での表現は 4 次交代群 $A(4)$
[24] 群論での表現は 5 次対称群 $S(5)$
[25] 群論での表現は 5 次交代群 $A(5)$

年を経て抽象代数によって説明された。5 次以上の代数方程式に解の公式が存在しないことは 2000 年前のプラトン立体によって説明できるのである。悠久の数学の歴史がここにあるのだ。

数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深めるため，数学のよさを認識しそれらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てるためには，教科書の内容を説明し問題を解くことに加え，その内容がどのような意味を持つのかを説明する必要があると考えている。例えば「数学Ａ」空間図形の「正多面体」の際には，代数方程式との関連の話題に触れることにより，数学の奥行きの深さを実感してほしいのだ。今回紹介したものはほんの一例に過ぎず，高校数学を俯瞰して授業を組み立てていく必要があると感じている。今後も今回触れることのできなかった「授業中につい余談で話してしまった内容」についての教材化についてまとめてみたい。

なお，「問」の解答は紙面の都合と $\alpha-\omega$ の趣旨を勘案し割愛した。

「http://www.shimagami.net/aw/aw56.pdf」を参照のこと。

参考文献

[1] Coxeter,H,S,M, 銀林浩 (訳), 幾何学入門 (上), ちくま学芸文庫, 2009.
[2] Sautor,M, 富永星 (訳), シンメトリーの地図帳, 新潮社, 2007.
[3] 志賀浩二, 群論への 30 講, 朝倉書店, 1989.
[4] Klein,F., 関口次郎 (訳), 正 20 面体と 5 次方程式 改訂新版, シュプリンガー数学クラシックス, 2012.
[5] 小林俊一, 数学のかんどころ 14「ガロア理論」, 共立出版, 2013.
[6] 草場公邦, ガロワと方程式, 朝倉書店, 1989.
[7] 渡辺敬一, 代数の世界　改訂版, 朝倉出版, 2012.
[8] 上野健爾, ガロアの考えたこと, 現代思想 2011vol39-4,pp38-58, 青土社, 2011.
[9] 小島寛之, 天才ガロアの発想力, 技術評論社, 2010.
[10] 金重明, 13 歳の娘に語るガロアの数学, 岩波書店, 2011.
[11] 木村俊一, 天才数学者はこう解いた，こう生きた, 講談社学術文庫, 2016.
[12] 藤田有加, 島上直人,「ガロア理論と高校数学 —2 次方程式を用いてガロア理論を読み解く —」$\alpha-\omega$ 53 号, pp47-57, 2015.
[13] 島上直人, 「ガロア理論と高校数学 —ギリシャ三大問題の解決と正多角形の作図 —」$\alpha-\omega$ 55 号, pp.54-65, 2017.