分数型の漸化式の新しい視点からの解法

県立柏高等学校　西川 誠

生徒から「分数型の漸化式」について質問があり，いい機会だと思い少し考えてみると，「連立の漸化式」に帰着し，それを「隣接 3 項間の漸化式」にして機械的に解けることに気がつきました。行列が関係している従来から知られている解法の 1 種なのでしょうが，あまり本で見かけない方法だと思います。ただ，その解法をやるためには，「隣接 3 項間の漸化式」を手際よく解かないといけないので，まずその紹介から始めたいと思います。なお，ここでは厳密に解くことよりも答えを導くことに重点を置いています。

1　隣接 3 項間の漸化式の機械的な解法

問題 1

$a_1 = 6$，$a_2 = 26$，$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ のとき，a_n を求めよ。

(解答) 等比数列 $a_n = r^{n-1}$を代入してみると $r^{n+1} - 8r^n + 15r^{n-1} = 0$ から，両辺を r^{n-1} で割ると $r^2 - 8r + 15 = 0$ となります。(これが特性方程式で，文字は，普通 t を使います。) $r = 3$，5 なので，元の漸化式の解として，$A \cdot 3^{n-1}$と $B \cdot 5^{n-1}$ の 2 組が見つかった訳です。数列もベクトルと考えることが出来て，独立な 2 つの解が見つかったことに対応します。これから最終的な解が $a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 5^{n-1}$ とおけるわけです。後は，$a_1 = 6$，$a_2 = 26$ から $A + B = 6$ と $3A + 5B = 26$ となり，$A = 2$，$B = 4$ が求められ，答は，$a_n = \underline{2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1}}$ となります。

問題 2

$a_1 = 3$，$a_2 = 12$ ，$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ のとき，a_n を求めよ。

(解答) まず特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ を解くと $(t - 3)^2 = 0$ から $t = 3$(重解) しか出てきません。今度は，$a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 3^{n-1}$ とおいても駄目です。もう 1 つの独立した解がほしいので，それを，$n \cdot 3^{n-1}$ とします。実際 $a_n = n \cdot 3^{n-1}$ とすると，$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = (n+2) \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot (n+1) \cdot 3^n + 9 \cdot n \cdot 3^{n-1} = (n+2-2n-2+n) \cdot 3^{n+1} = 0$ となり確かに大丈夫です。そこで，$a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot n \cdot 3^{n-1}$ とおいて，$a_1 = 3$，$a_2 = 12$ から，$A+B = 3$ と $3A+6B = 12$ となり，$A = 2$ ，$B = 1$ が求められ，答は，$a_n = \underline{(n + 2) \cdot 3^{n-1}}$ となります。

2　分数型の漸化式の機械的な解法

問題 3

$a_1 = \dfrac{3}{2}$ ，$a_{n+1} = \dfrac{5a_n - 1}{4a_n + 1} \cdots$①　のとき，$a_n$ を求めよ。

$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ とおいて，①に代入すると $\dfrac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \dfrac{5\frac{b_n}{c_n} - 1}{4\frac{b_n}{c_n} + 1} = \dfrac{5b_n - c_n}{4b_n + c_n}$ となり $b_{n+1} = 5b_n - c_n \cdots$②，$c_{n+1} = 4b_n + c_n \cdots$③ という連立の漸化式が出来ます。②から，$c_n = -b_{n+1} + 5b_n \cdots$④ として，さらに番号を 1 つ増やした $c_{n+1} = -b_{n+2} + 5b_{n+1} \cdots$⑤ から，$c_n$ が消去できます。つまり，④，⑤を③に代入すると，$-b_{n+2} + 5b_{n+1} = 4b_n - b_{n+1} + 5b_n$ となり，$b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0 \cdots$⑥ という 3 項間の漸化式が出来ました。

また，面白い事に，b_n の方を消去して c_n の漸化式を作っても，同じ形の漸化式になります。次に $a_1 = \dfrac{3}{2} = \dfrac{b_1}{c_1}$ から，$b_1 = 3$，$c_1 = 2$ とおき，②,③ に代入して，$b_2 = 5b_1 - c_1 = 13$ と $c_2 = 4b_1 + c_1 = 14$ より b_n なら，$b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0$ ，$b_1 = 3$，$b_2 = 13$ という漸化式になります。特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ を解くと $(t-3)^2 = 0$ から $t = 3$(重解) より，$b_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot n \cdot 3^{n-1}$ とおいて，$b_1 = 3$，$b_2 = 13$ から，$A + B = 3$ と $3A + 6B = 13$ となり，$A = \dfrac{5}{3}$，$B = \dfrac{4}{3}$ が求まります。つまり $b_n = \dfrac{(4n+5)\cdot 3^{n-1}}{3}$ です。

c_n なら，$c_{n+2} - 6c_{n+1} + 9c_n = 0$，$c_1 = 2$，$c_2 = 14$ で，b_n のときと同様に，$c_n = C \cdot 3^{n-1} + D \cdot n \cdot 3^{n-1}$ とおいて，$c_1 = 2$，$c_2 = 14$ から，$C + D = 2$ と $3C + 6D = 14$ となり，$C = -\dfrac{2}{3}$，$D = \dfrac{8}{3}$ が求まります。つまり $c_n = \dfrac{(8n-2)\cdot 3^{n-1}}{3}$ です。これらを，a_n の式に代入すると $a_n = \dfrac{b_n}{c_n} = \dfrac{4n+5}{8n-2}$ と求まります。(注) 重解だといつも分母，分子が n の 1 次式となります。

3　手順を整理し，一部を公式化しましょう。

$a_{n+1} = \dfrac{a \cdot a_n + b}{c \cdot a_n + d}$ とあったら，$b_{n+1} = a \cdot b_n + b \cdot c_n$，$c_{n+1} = c \cdot b_n + d \cdot c_n$ で c_n を消去すると $\boxed{\text{基本公式 } b_{n+2} - (a+d)b_{n+1} + (ad-bc)b_n = 0}$ となります。ここで，$(a+d)$ とか $(ad-bc)$ という，行列のケーリー・ハミルトンの定理と同じ式が出てきました。これを公式として記憶したものとして，実際にこの基本公式を使ってやってみましょう。

問題 4

$a_1 = 8$ ，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 2}$ のとき，a_n を求めよ。

まず，$a_1 = \dfrac{8}{1} = \dfrac{b_1}{c_1}$ から，$b_1 = 8$，$c_1 = 1$ とおき，$b_2 = 26$，$c_2 = 10$ を求めます。次に公式から，$a = 3$，$b = 2$，$c = 1$，$d = 2$ から $a + d = 5$ ，$ad - bc = 4$ より，$t^2 - 5t + 4 = 0$ を解き，$t = 1$，4 なので，b_n なら，$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0$ ，$b_1 = 8$ ，$b_2 = 26$ を解くこととなり，$b_n = A \cdot 1^{n-1} + B \cdot 4^{n-1}$ とおいて，$b_1 = 8$ ，$b_2 = 26$ から，$A + B = 8$ と $A + 4B = 26$ となり，$A = 2$，$B = 6$ が求まるから，$b_n = 2 \cdot 1^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1} = 6 \cdot 4^{n-1} + 2$ となります。c_n も同様に，$c_{n+2} - 5c_{n+1} + 4c_n = 0$，$c_1 = 1$ ，$c_2 = 10$ を解いて，$c_n = C \cdot 1^{n-1} + D \cdot 4^{n-1}$

とおいて，$c_1=1$ ，$c_2=10$ 　から，$C+D=1$ と $C+4D=10$ となり，$C=-2$ ，$D=3$ が求まるから，$c_n=-2\cdot 1^{n-1}+3\cdot 4^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}-2$ となります。これから，a_n の式に代入すると $a_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{6\cdot 4^{n-1}+2}{3\cdot 4^{n-1}-2}$ と求められます。

練習問題として，問題 5 と問題 6 をやってみて下さい。慣れれば随分簡単に解けると思います。

問題 5

$a_1=3$ ，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-16}{a_n-7}$ のとき，a_n を求めよ。(秋田大)

まず，$a_1=\dfrac{3}{1}=\dfrac{b_1}{c_1}$ から，$b_1=3, c_1=1$ とおき，さらに，$b_2=-13, c_2=-4$ を求めます。次に，$t^2+6t+9=0$ を解くと $t=-3$(重解) です。これで，$b_n=A\cdot(-3)^{n-1}+B\cdot n\cdot(-3)^{n-1}$ とおいて，$b_1=3$ ，$b_2=-13$ より，$b_n=\dfrac{(4n+5)\cdot(-3)^{n-1}}{3}$ が出ます。

c_n なら，$c_n=C\cdot(-3)^{n-1}+D\cdot n\cdot(-3)^{n-1}$ とおいて，$c_1=1$ ，$c_2=-4$ から，

$c_n=\dfrac{(n+2)\cdot(-3)^{n-1}}{3}$ となり，　$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{4n+5}{n+2}$ と求められます。

問題 6

$a_1=1$ ，$a_{n+1}=\dfrac{9a_n+5}{3a_n-5}$ のとき，a_n を求めよ。(甲子園大)

まず，$a_1=\dfrac{1}{1}=\dfrac{b_1}{c_1}$ から，$b_1=1$ ，$c_1=1$ とおき，$b_2=14$，$c_2=-2$ を求め，次に，$t^2-4t-60=0$ を解くと $t=10$，-6 より，$b_n=A\cdot 10^{n-1}+B\cdot(-6)^{n-1}$ とおいて解けば，$b_1=1$ ，$b_2=14$，より，$b_n=\dfrac{5\cdot 10^{n-1}-(-6)^{n-1}}{4}$ です。$c_n=C\cdot 10^{n-1}+D\cdot(-6)^{n-1}$ とおいて解けば $c_1=1$，$c_2=-2$ から，$c_n=\dfrac{10^{n-1}+3\cdot(-6)^{n-1}}{4}$ となります。これから，a_n の式に代入して約分すると $a_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{5\cdot 10^{n-1}-(-6)^{n-1}}{10^{n-1}+3\cdot(-6)^{n-1}}=\dfrac{5\cdot 5^{n-1}-(-3)^{n-1}}{5^{n-1}+3\cdot(-3)^{n-1}}$

最後に，2^{n-1} で約分しています。さらに，分母，分子を $(-3)^{n-1}$ で割ってやると $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}$ だけが残る形にも変形できます。以上のことから，$t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$ が，(e，f，g，h，r を定数として) 重解だと，$a_n=\dfrac{e\cdot n+f}{g\cdot n+h}$ の形で，重解じゃないなら，$\dfrac{e\cdot r^{n-1}+f}{g\cdot r^{n-1}+h}$ の形だとすぐわかります。

4　解けるけど解かない方がいい問題

問題 7

$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-3}{7a_n+4}\cdots$ 　① 　のとき，a_{2018} を求めよ。

$t^2-5t+25=0$ を解くと虚数解になります。虚数解でも操作を続けていいのですが，仮に，一般項が求められたとしても，その式から，a_{2018} を求めるのは，楽じゃないので，別の道を探りましょう。それは，ただ実験してみようということです。(初心に戻れということ。)

$a_1=\dfrac{3}{2}$ を① に代入すると，$a_2=-\dfrac{3}{29}$ となり，さらにこれを ① に代入すると，$a_3=-\dfrac{18}{19}$ となり，さらにこれを ① に代入すると，$a_4=\dfrac{3}{2}$ となります。これで，a_1 にもどったという

ことがわかりますから，後は，これの繰り返しです。2018 を 3 で割った余りは 2 ですから，$a_{2018} = a_2 = -\dfrac{3}{29}$ となるのです。3 回やると元にもどるように，私が設定したのだから，当然の結果なのですが，なかなか面白い問題だと思います。$t^3 \pm k^3$ の因数分解の公式に出て来る 2 次式を使うと，3 回やると元にもどるような漸化式を自分でいくつでも作ることができます。

例えば，$(t^2+7t+49)$ などは，t^3-7^3 に出てくる因数です。これから，$a+d=-7$，$ad-bc=49$ を満たす a，b，c，d を適当に取ってくればいいのです。例えば $a=2$，$b=-67$，$c=1$，$d=-9$ とすると，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n-67}{a_n-9}$ となり，$a_1 = \dfrac{4}{5}$ とでもすると，$a_4 = \dfrac{4}{5}$ となるのです。

5　分数型で隣接 2 項じゃない漸化式の紹介

問題 8

$a_1 = \dfrac{4}{5}$，$a_2 = -\dfrac{5}{11}$，$a_{n+2} = \dfrac{2a_n+1}{2a_n+3} \cdots$ ①　のとき，a_n を求めよ。

a_{n+2} となっている箇所が，普通じゃない部分です。$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ とおいて，$b_{n+2} = 2b_n + c_n \cdots$②，$c_{n+2} = 2b_n + 3c_n \cdots$③ となり，② から，$c_n = b_{n+2} - 2b_n \cdots$④ として，さらに番号を 2 つ増やした $c_{n+2} = b_{n+4} - 2b_{n+2} \cdots$⑤ も考えると，$c_n$ が消去できます。つまり，$b_{n+4} - 5b_{n+2} + 4b_n = 0 \cdots$⑥　という漸化式が出来ます。

これも，b_n の方を消去して，c_n の漸化式を作っても，同じ形になります。それに，$2+3=5$，$2\times3-1\times2=4$ になっている訳で，また $(a+d)$ と $(ad-bc)$ です。次に $b_1=4$，$c_1=5$，$b_2=-5$，$c_2=11$，$b_3=13$，$c_3=23$，$b_4=1$，$c_4=23$ まで，求めておきます。これで，b_n なら，$b_{n+4}-5b_{n+2}+4b_n=0$ という漸化式を $b_1=4$，$b_2=-5$，$b_3=13$，$b_4=1$ という初期条件の元で解くことになります。特性方程式 $t^4-5t^2+4=0$ を解くと $(t^2-4)(t^2-1)=0$ から $t=-2, 2, -1, 1$ となり，$b_n = A\cdot(-2)^{n-1} + B\cdot 2^{n-1} + C\cdot(-1)^{n-1} + D\cdot 1^{n-1}$ とおけます。これに，$b_1=4$，$b_2=-5$，$b_3=13$，$b_4=1$ という条件から，$A=1$，$B=2$，$C=4$，$D=-3$ と解いてこれで，$b_n = (-2)^{n-1} + 2\cdot2^{n-1} + 4\cdot(-1)^{n-1} - 3$ となります。c_n の方は，連立方程式を作って解いてもいいですが，$c_n = b_{n+2} - 2b_n \cdots$④ に代入して $c_n = 2\cdot(-2)^{n-1} + 4\cdot2^{n-1} - 4\cdot(-1)^{n-1} + 3$ と求めるのが楽でしょう。これで，やっと，$a_n = \dfrac{(-2)^{n-1} + 2\cdot2^{n-1} + 4\cdot(-1)^{n-1} - 3}{2\cdot(-2)^{n-1} + 4\cdot2^{n-1} - 4\cdot(-1)^{n-1} + 3}$ と求められました。また，漸化式の答えが見かけ上，2 つあるように見える例もあげておきます。

問題 9

$a_1 = 2$，$a_2 = -\dfrac{7}{13}$，$a_{n+2} = \dfrac{2a_n+1}{2a_n+3}$ のとき，a_n を求めよ。

$a_1 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{b_1}{c_1}$，$a_2 = \dfrac{-7}{13} = \dfrac{b_2}{c_2}$ と考えて解くと，

$a_n = \dfrac{0\cdot(-2)^{n-1} + 1\cdot2^{n-1} + 5\cdot(-1)^{n-1} - 4}{0\cdot(-2)^{n-1} + 2\cdot2^{n-1} - 5\cdot(-1)^{n-1} + 4} \cdots$⑦ となり，

$a_1 = \dfrac{6}{3} = \dfrac{b_1}{c_1}$，$a_2 = \dfrac{7}{-13} = \dfrac{b_2}{c_2}$ と考えて解くと，

$a_n = \dfrac{2\cdot(-2)^{n-1}+1\cdot 2^{n-1}-3\cdot(-1)^{n-1}+6}{4\cdot(-2)^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot(-1)^{n-1}-6}\cdots$⑧ となります。初期条件のおき方には，自由度があるので，答えが 1 つに確定せず，⑦ と ⑧ の式も違う式に見えますが，実際は，$n=1,\ 2, \cdots$ と代入して，約分すると同じ値になります。ちょっと不思議ですね。

6　分数型の漸化式を作るという視点からの考察

$a_n = \dfrac{a\cdot\alpha^{n-1}+b\cdot\beta^{n-1}}{c\cdot\alpha^{n-1}+d\cdot\beta^{n-1}}$ だと，分母，分子を β^{n-1} で割って $a_n = \dfrac{a\cdot r^{n-1}+b}{c\cdot r^{n-1}+d}$ となり，逆行列の公式 ($ad-bc$ の値は無視) から，$r^{n-1} = \dfrac{d\cdot a_n - b}{-c\cdot a_n + a}$ となり，これを $a_{n+1} = \dfrac{a\cdot r\cdot r^{n-1}+b}{c\cdot r\cdot r^{n-1}+d}$ に代入すると分数型の漸化式が得られます。$a_n = \dfrac{a\cdot f(n)+b}{c\cdot f(n)+d}$ と $a_{n+1} = \dfrac{a\cdot f(n+1)+b}{c\cdot f(n+1)+d}$ とから $f(n)$ が簡単に消せるためには，$f(n+1) = p\cdot f(n)+q$ の形でないとだめなようなのですが，この漸化式は，$f(n)$ が r^{n-1} が関係するか，n の 1 次式しかない訳です。これは，重解の場合とか，**5** で扱った漸化式等もすべて，この考え方の範疇に入ってきてしまうという話です。

例えばその範疇ではない，$a_n = \dfrac{2^n-1}{3^n+1}$ なら，どんな漸化式を満たすか考えてみましょう。

分母を払って $a_n\cdot(3^n+1) = 2^n-1$ より整理して，$2^n - a_n\cdot 3^n = a_n+1\cdots$① となり，番号を 1 つずらした式も作ると，$2\cdot 2^n - 3\cdot a_{n+1}\cdot 3^n = a_{n+1}+1\cdots$② この ①と② から，$2^n$ と 3^n を未知数のように考えて解くと，$2^n = \dfrac{a_n - 3a_{n+1} - 2a_n a_{n+1}}{2a_n - 3a_{n+1}}$，$3^n = \dfrac{-2a_n + a_{n+1} - 1}{2a_n - 3a_{n+1}}$ となり，これらを $a_{n+2} = \dfrac{4\cdot 2^n - 1}{9\cdot 3^n + 1}$ に代入して整理すれば，$a_{n+2} = \dfrac{2a_n - 9a_{n+1} - 8a_n a_{n+1}}{-16a_n + 6a_{n+1} - 9}$ という，結構複雑な漸化式が得られます。最後に，「一般解」と「特殊解」についての話と特性方程式という名称について，ふれておきます。

7　「一般解」と「特殊解」

高校で主に扱う漸化式は，2 項間の漸化式が $a_{n+1} = 3a_n + 8$ のようなもので，$\alpha = 3\alpha + 8$ という 1 次方程式を解き $\alpha = -4$ を求めて変形していきます。3 項間の漸化式だと $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ のようなもので，$t^2 - 8t + 15 = 0$ という 2 次方程式を解いて，$t = 3,\ 5$ を出して変形して行きます。このように，2 項間の漸化式だと 1 次方程式で，3 項間の漸化式だと 2 次方程式が関係してきて，どちらも特性方程式と呼ばれたりしますが，これは，ちょっと問題がある名称の付け方なのです。それは，何故なのか説明するために，まず「一般解」と「特殊解」について説明しておきます。

とりあえず，初期条件を気にしないで，純粋に漸化式 $a_{n+1} - 3a_n = 8\cdots$① だけを考えましょう。まず，① の式で，8 を 0 に変えた①の斉次漸化式 $a_{n+1} - 3a_n = 0\cdots$② を考えます。すると ② の一般解は，$a_n = A\cdot 3^{n-1}$ となります。次に，$a_{n+1} - 3a_n = 8$ の解を 1 つ見つけます。その解を α（定数）とおいて $\alpha - 3\alpha = 8$ という 1 次方程式を解くと，特殊解 $\alpha = -4$ が求められました。

以上のことから，$a_{n+1} - 3a_n = 8$ の すべて の解は，$a_n = \underset{\text{一般解}}{A\cdot 3^{n-1}}\ \underset{\text{特殊解}}{-4}$ のような形におけるのです。何故なら，漸化式 $a_{n+1} - 3a_n = 8$ を満たす解として，b_n と c_n の 2 つあったとすると，$b_{n+1} - 3b_n = 8$ と $c_{n+1} - 3c_n = 8$ が成立するので，差をとってやると，

$(b_{n+1}-c_{n+1})-3(b_n-c_n)\underset{\sim\sim}{=0}$ となりますが，これは，何を意味するかというと (b_n-c_n) という数列が，漸化式 $a_{n+1}-3a_n\underset{\sim\sim}{=0}$ を満たすということで，$b_n-c_n=\underbrace{A}_{\text{一般解}}\cdot 3^{n-1}$ となり，$b_n=\underbrace{A}_{\text{一般解}}\cdot 3^{n-1}+\underbrace{c_n}_{\text{特殊解}}$ の形になる訳です。以上のことを踏まえて，最後に，隣接 3 項間の漸化式で，少しレベルの高い問題をやってみましょう。

問題 10

$a_1=9$，$a_2=22$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=16$ のとき，a_n を求めよ。

(解答)$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の解は，特性方程式 $t^2-5t+6=0$ を解いて，$(t-2)(t-3)=0$ から $t=2,3$ となり $A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 3^{n-1}$ が一般解です。次に特殊解は，右辺が定数の 16 であることに注意して $a_n=\alpha$ の形になるだろうと推測して，代入すると，$\alpha-5\alpha+6\alpha=16$ から，$\alpha=8$ と求まり，これが，特殊解となるので，$a_n=\underbrace{A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 3^{n-1}}_{(\text{一般解})}\underbrace{+8}_{(\text{特殊解})}$ とおけて，後は，$a_1=9$，$a_2=22$ だから，$A+B+8=9$ と $2A+3B+8=22$ より，$A=-11$，$B=12$ なので，$a_n=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-11\cdot 2^{n-1}+12\cdot 3^{n-1}+8}$ となります。

この解答を見てわかるように，3 項間の漸化式であっても，右辺が定数ならば，特殊解を求める時には，1 次方程式を解くことになるわけです。2 項間の漸化式だけが α とおくわけではないのです。隣接 2 項間の漸化式 $a_{n+1}-3a_n=8$ を解くのに，α とおくのは，特殊解を求める操作で，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の，特性方程式 $t^2-5t+6=0$ とは，話が違うのです。どちらも特性方程式と呼ぶことは，問題があるわけです。名称については，人間が勝手に付けているだけですから，どう付けてもかまわないのですが，毛色が違うことは，知っておいていいと思います。ついでに言っておくと，特殊解は，「似たものになる。」と記憶するだけで結構解けます。$a_{n+1}-2a_n=3^n$ なら $a_n=\alpha\cdot 3^{n-1}$ の形で探します。(等比は 3 が生き残る。) $a_{n+1}=5a_n+32n$ なら $a_n=\alpha n+\beta$ の形で探します。$32n$ の 32 は無視して，n の 1 次式だと読み取るのです。32 は消え去る運命の数字です。$a_{n+1}=3a_n+5\cdot 3^n$ なら $a_n=\alpha n\cdot 3^{n-1}$ の形で探します。n が付いている理由は，一般解が，$A\cdot 3^{n-1}$ で特殊解も $\alpha\cdot 3^{n-1}$ の形では，3 がかぶっていて，うまくいかないので，重解の場合をまねて，n を付けるのです。(3 重解だと n^2 が付く)

(参考文献)

1. 宮原繁，「モノグラフ 15．漸化式」，(科学新興社)，1988 年発行