テイラー展開を導く教材

— 体験する数学を目指して —

磯辺高等学校　氏家 悟

1　はじめに

自分は日ごろ，数を感覚的，体験的に捉えさせたいと考えている。数学 III で平均値の定理を扱ったとき，テイラー展開を「見つける」教材を作ったので，紹介する。

テイラーの定理に出てくる次の式

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

は，普通は天下りに掲載し，いきなり，

$$\varphi(x)=f(a+h)-\left(f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)\right)$$

などと置いて，証明して終わりである。[1)]高校生に無味乾燥な証明を見せても，ほとんどの生徒は興味を示さないだろうし，定理を紹介したところで，「複雑な式だな」くらいの感想しか持たないと思う。

先達（Sir Brook Taylor 1685 - 1731 年) がこの定理を見つけたときは，いきなり定理の形を思いついて，証明したわけではあるまい。試行錯誤を繰り返し，整理した形を発表し，後世に伝わったのである。

どのように見つけたのかは知る由もないが，テイラー展開は，平均値の定理を繰り返し代入することで，（証明にはならないが）ある程度構成できるのである。

2　平均値の定理

教科書[2)]では次の通り。

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば， $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$$ を満たす実数 c が存在する。

プリントの大半は，空欄を埋める形で誘導した。

1) 昔見た赤チャートもそうだった。
2) 高等学校 数学 III 数研出版

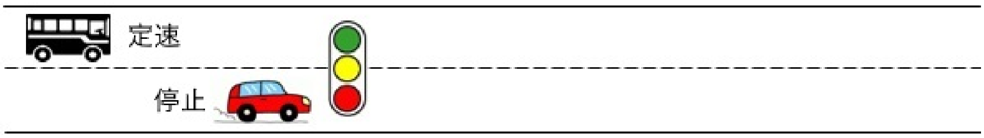
1. 微分の定義 $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)$ の lim を外した式

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\qquad a<c<b}$$

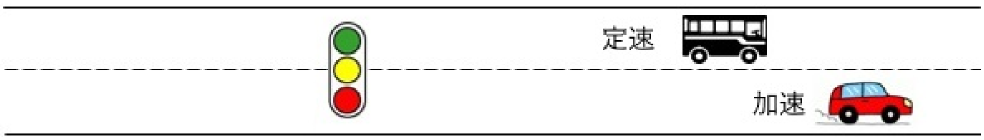
が平均値の定理である。

この式で, $b\to a$ ならば, はさみうちの原理で, $c\to\boxed{a}$ となり, $f'(c)\to\boxed{f'(a)}$ となるのが微分である。

感覚的な理解のために説明するのは，やはり速度である。



停止している車の横を，定速で走るバスが追い抜く。その後，車が発車，加速してバスを追い抜くまでの間に，バスと同じ速度になる時刻が存在する。



「定速」のバスが 2 点を結ぶ直線，加速する車の速度が曲線というわけである[3)]。

3　平均値の定理の書き換え

まずは，この平均値の定理の書き換えからスタートである。

2. 平均値の定理において，$b=a+h$ と書き換えよう。このとき，$b-a=\boxed{h}$ より，

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c),\qquad a<c<a+h}$$

ここで，$a<c<a+h$ を一工夫する。$c=a+h_1h$ とすれば，$a<\boxed{a+h_1h}<a+h$。

辺々 a を引いて，$\boxed{0}<\boxed{h_1h}<\boxed{h}$。

辺々 $h>0$ で割って，$\boxed{0}<\boxed{h_1}<\boxed{1}$

これで平均値の定理を書き直すと，

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+h_1h),\qquad 0<h_1<1}$$

3) 同じ速度のときは 2 台の車は横並びにならない。「2 台が横に並ぶ時刻が存在する」というのが，中間値の定理。

分母を払って移項すれば，

$f(a+h) =$ $\boxed{f(a) + hf'(a + h_1 h), \quad 0 < h_1 < 1}$

これが 1 次のテイラー展開である。この後に出てくる近似式は，$a + h_1 h \fallingdotseq a$ として，$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + hf'(a)$ と説明できる。

4 次々求めて代入

この 1 次導関数を使った平均値の定理から，2 次導関数，3 次導関数を使った平均値の定理を，機械的な置き換えで作る。

3. 2. の結果を書き換えて，$f'(a + h_1 h)$ の平均値の定理にしてみよう。

書き換える内容は，

f を f' に，

f' を f'' に，

h を $h_1 h$ に，

そうして，新たに $0 < h_2 < 1$ を追加する。

$f'(a + h_1 h) =$ $\boxed{f'(a) + h_1 hf''(a + h_2 h_1 h), \quad 0 < h_2 < 1}$

さらに同様の置き換えで，

4. 2. の結果を書き換えて，$f''(a + h_2 h_1 h)$ の平均値の定理にしてみよう。

（中略）

$f'(a + h_2 h_1 h) =$ $\boxed{f''(a) + h_2 h_1 hf'''(a + h_3 h_2 h_1 h), 0 < h_3 < 1}$

5. 2. の結果

$f(a+h) =$ $\boxed{f(a) + hf'(a + h_1 h), \quad 0 < h_1 < 1}$

これの 1 次導関数 $f'(a + h_1 h)$ を，**3.** の 1 次導関数の平均値の定理で書き換えると，

$f(a+h) = f(a) + hf'(a + h_1 h)$

$= f(a) + h\left(\boxed{f'(a) + h_1 hf''(a + h_2 h_1 h)}\right)$

$= \boxed{f(a) + hf'(a) + h_1 h^2 f''(a + h_2 h_1 h)}$

さらに，これの $f''(a + h_2 h_1 h)$ を **4.** の結果を用いて書き換える.

6.
$f(a+h)$
$=f(a)+hf'(a)+h_1h^2f''(a+h_2h_1h)$
$=f(a)+hf'(a)+h_1h^2\left(\boxed{f''(a)+h^3f'''(a+h_3h_2h_1h)}\right)$
$=\boxed{f(a)+hf'(a)+h_1h^2f''(a)+h_2h_1^2h^3f'''(a+h_3h_2h_1h)}$

7. この結果，次のように類推される。
$f(a+h)=f(a)+\boxed{h}f'(a)+\boxed{h_1h^2}f''(a)+\boxed{h_2h_1^2h^3}f'''(a)+\boxed{h_3h_2^2h_1^3h^4}f''''(a)+\cdots$

5 係数の決定

係数 h_1, h_2, h_3 を多項式の展開式との係数比較で予想させる。

8. $f(x)=x^3$ のとき，h_1, h_2 を決めよ。
(1) $f'(x)=\boxed{3x^2}$，$f''(x)=\boxed{6x}$，$f'''(x)=\boxed{6}$
より，$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h_1h^2f''(a)+h_2h_1^2h^3f'''(a)$ は，
$(a+h)^3=a^3+h\boxed{3a^2}+h_1h^2\boxed{6a}+h_2h_1^2h^3\boxed{6}$
(2) $f(a+h)$ を普通に展開せよ。
$f(a+h)=\boxed{(a+h)^3}=\boxed{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3}$
(3) (1), (2) の係数を比較し，h_1, h_2 を求めよ。
$\boxed{h_1=\frac{1}{2},\ h_2=\frac{2}{3}}$
(4) $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h_1h^2f''(a)+h_2h_1^2h^3f'''(a)$
$=f(a)+\frac{h}{\boxed{1}}f'(a)+\frac{h^2}{\boxed{2}}f''(a)+\frac{h^3}{\boxed{6}}f'''(a)$

さらに，$f(x)=x^4$ を使って，h_1, h_2, h_3 を求めさせる。

9. $f(x)=x^4$ のとき，h_1, h_2, h_3 を決めよ。
（中略）
(4) $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h_1h^2f''(a)+h_2h_1^2h^3f'''(a)+h_3h_2^2h_1^3h^4f''''(a)$
$=f(a)+\frac{h}{\boxed{1}}f'(a)+\frac{h^2}{\boxed{2}}f''(a)+\frac{h^3}{\boxed{6}}f'''(a)+\frac{h^4}{\boxed{24}}f''''(a)$

となって，テイラー展開が容易に予想されるわけである。

10.
$f(a+h) = f(a) + \dfrac{h}{\boxed{1}} f'(a) + \dfrac{h^2}{\boxed{2}} f''(a) + \dfrac{h^3}{\boxed{6}} f'''(a) + \dfrac{h^4}{\boxed{24}} f''''(a) + \cdots + \dfrac{h^n}{\boxed{n!}} f^{(n)}(a) + \cdots$

本当は，平均値の定理なので，最後は $\cdots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$，$0 < \theta < 1$ なのであるが，ここでは深入りせず省略した。

6　指数関数，三角関数，複素数の極形式

1 学期，複素数の極形式の導入には，やはり回転を実感してもらうためにも，「1 の冪根」（参考文献 [1]）を先に行ったが，すぐに，天下りに $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を「定義」して，極形式の授業はすべてこの形にした。というのも生徒は，例えば，$1 - \sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3})$ を極形式としてしまうのである。$e^{i\theta}$ に直せるのは，$\cos\theta + i\sin\theta$ の形の限ることで，そのような勘違いを防ごうと考えたのである。

また，生徒はどうしても，虚数は架空の数であるというような認識から離れられないようで，複素平面 1 時間目の授業の感想は次の通り[4]。

虚数もグラフに表しちゃうのは謎だった。
存在しない数について考えるのは難しいと思った。
複素数を座標で表せるのはすごいと思いました。i（虚数）がよくわかりません。
図示してみると簡単でわかりやすかった。
グラフに表すことで 2 と i と -2 等の関係が分かりやすかった。
何のためにやっているのかよくわからない。何に使いますか。
複素数を平面上で表そうと考えたことが不思議に思った。
ナゾの虚数を平面で表せるのは便利だと思った。
どうゆう場面で使うのか不思議だ。
わけがわかりません。

虚数は「存在しない数」という意識で，それを打破するためにも，実際に交流回路などで，虚数が使われている実例をネットから拾ってきて見せたのだが，そのとき，$e^{i\theta}$ は便利なのである。

そうすれば，$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ や，de Moivre の定理 $(e^{i\theta})^u = e^{iu\theta}$ は指数法則そのものであるし，三角関数の加法定理の暗記法にもつながるということで，便利であった。

この先は，プリントにはせず，デモンストレーションであるが，テイラー展開から，マクローリン展開の式を作り，e^x と，sin, cos の級数展開の x を ix と置き換えることにより，$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ となることを示し，有名な $e^{\pi i} = -1$ や，数 II では定義できなかった，負の対数 $\log_e(-1) = \pi i$ や $i^i = \dfrac{1}{\sqrt{e^\pi}}$ などを見せたら，一部の生徒はおもしろがってくれた。

[4] 表記は生徒の記述のまま

7　接線と凹凸

接線は，$f(a+h) = f(a) + hf'(a)$ の左辺 $f(a+h)$ を $f(x)$ とするだけで，接線の方程式 $y = f(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ を得られるのであるが，2 次までのテイラー展開 $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{2}f''(a)$ を使うと，凹凸の説明が容易になる。

$y = f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2}f''(a)$ は，接線に放物線 $\dfrac{(x-a)^2}{2}f''(a)$ が接している形になっている。放物線の凹凸は $(x-a)^2$ の係数の符号で決まる。つまり，$f''(a) > 0$ のとき放物線は下に凸であり，曲線の凹凸が 2 次導関数の符号によることが実感できる。

8　発見的教材

チャート式や解析の教科書などでは，テイラーの定理の式が与えられて，それを証明する形になっている。論理的にはそれで正しいが，論理的な正しさと，生徒の「わかった」感覚は別である。

生徒自らが性質を見つけられるような教材ができないかと，常に考えている。

参考文献

[1] 氏家悟，「複素数平面」$\alpha - \omega$，52 号，pp.72-80，2014.
`http://math.sakura.ne.jp/index.php?key=joh18kzt3-27#_27`