

たすき掛けの因数分解をバリアフリーにする

— 中々外々の因数分解 —

東葛飾高等学校定時制 和田 真次

1 はじめに

たすき掛けの因数分解を難なく解いている人にはあまり関係のないことですが、たすき掛けの因数分解には数々の不満を持っている生徒も少なくないようです。それは、

- (1) なぜ別の場所で計算するのか。
- (2) 斜めにかけてかと思うと答えは横に読む。
- (3) そのせいで、横にかけてしまったり、答えを斜めに読んでしまったりする。
- (4) 答えを書き写すときに写し間違える。

このようなことは「あり得ないミス」と映るかも知れませんが、繰り返す生徒は何度も繰り返します。いわば、このちょっとした段差をなくすことが、たすき掛けの因数分解をバリアフリーにするということなのです。

2 中々外々

「中々外々(なかなかとそと)の因数分解」を大雑把にいうと、問題のすぐ後ろに答えの入るカッコを2つ書き、答えの候補を書き入れてチェックしてOKなら、それがそのまま答えになるというものです。

例題として、 $2x^2 - x - 6$ を因数分解します。

STEP 1

問題の式の後ろに、答えの入るカッコを2つ書く。

$$2x^2 - x - 6 = (\quad) (\quad)$$

STEP 2

2つのカッコの前の方に、かけて $2x^2$ になるような2つの x の項を書く。

$$2x^2 - x - 6 = (2x \quad)(x \quad)$$

$2x \times x = 2x^2$

かけて等しくなるようにする

STEP 3

2つのカッコの後ろの方に、かけて -6 になるような2つの定数項を書く。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 2)(x - 3)$$

$(+2) \times (-3) = -6$

かけて等しくなるようにする

さて、**STEP 4** からは、このカッコの自身が本当に答えか確かめます。

STEP 4

前のカッコの後ろの項と、後ろのカッコの前の項(中々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 2)(x - 3)$$

$+2x$

STEP 5

前のカッコの前の項と、後ろのカッコの後ろの項(外々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 2)(x - 3)$$

$+2x$
 $-6x$

STEP 6

STEP 4と**STEP 5**のメモの下に線を引き、2つをたす。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r} +2x \\ -6x \\ \hline -4x \end{array}$$

STEP 7

これを元の式の1次の項(x の項)と比較すると、一致しない。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r} +2x \\ -6x \\ \hline -4x \end{array}$$

$-x$ にならなければならないのに、 $-4x$ になってしまった。

そこで、 $+2$ と -3 の位置を入れ換えて、

STEP 3からやり直します。

STEP 3'

2つのカッコの後ろの方に、かけて -6 になるような2つの定数項を書く。

$$2x^2 - x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r} (-3) \times (+2) = -6 \end{array}$$

かけて等しくなるようにする

STEP 4'

前のカッコの後ろの項と、後ろのカッコの前の項(中々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r} -3x \end{array}$$

STEP 5' 前のカッコの前の項と、後ろのカッコの後ろの項(外々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r} -3x \\ +4x \end{array}$$

STEP 6'

STEP 4と**STEP 5**のメモの下に線を引き、2つをたす。

$$2x^2 - x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r} -3x \\ +4x \\ \hline +x \end{array}$$

STEP 7'

これを元の式の1次の項(x の項)と比較すると、一致しない。

$$2x^2 - x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r} -3x \\ +4x \\ \hline +x \end{array}$$

$-x$ にならなければならないのに、 $+x$ になってしまった。

しかし、気を落とすことはありません。

$+$ 、 $-$ が逆だけで、数字は合っています。こういう時はカッコの中の数字の位置は合っていて、 $+$ 、 $-$ だけ逆なのです。

$+3$ と -2 の組合せで解けるはずですよ。やってみましょう。

STEP 3''

2つのカッコの後ろの方に、かけて -6 になるような2つの定数項を書く。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

$$\begin{array}{r} (+3) \times (-2) = -6 \end{array}$$

かけて等しくなるようにする

STEP 4''

前のカッコの後ろの項と、後ろのカッコの前の項(中々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

$$\begin{array}{r} +3x \end{array}$$

STEP 5'' 前のカッコの前の項と、後ろのカッコの後ろの項(外々)をかけて、図のようにメモする。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

$\begin{array}{c} +3x \\ -4x \end{array}$

STEP 6''

STEP 4''と**STEP 5''**のメモの下に線を引き、2つをたす。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

$\begin{array}{c} +3x \\ -4x \\ \hline -x \end{array}$

STEP 7''

これを元の式の1次の項(x の項)と比べると一致する。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

$\begin{array}{c} +3x \\ -4x \\ \hline -x \end{array}$

よって、因数分解は成功!そして、この時、後ろに書いてあるカッコがそのまま答えです。

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2) \leftarrow \text{これが答え}$$

3 x, y の2次式の因数分解

ところで、たすき掛けの因数分解の応用問題に、たすき掛けの因数分解を2重に使うものがあります。次のようなものです。

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y - 3$$

「中々外々の因数分解」は、あくまでたすき掛けの因数分解を変形したものに過ぎませんから、こういった問題も解けます。やってみましょう。 x について整理し、

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y - 3 \\ = x^2 + (3y + 2)x + (2y^2 + y - 3) \end{aligned}$$

最後の y についての2次式を因数分解します。

$$= x^2 + (3y + 2)x + (y - 1)(2y + 3)$$

$\begin{array}{c} -2y \\ +3y \\ \hline +y \end{array}$

そして、 $(y - 1)$ と $(2y + 3)$ を因数として式全体を因数分解すると

$$= \{x + (y - 1)\}\{x + (2y + 3)\}$$

$\begin{array}{c} +(y - 1)x \\ +(2y + 3)x \\ \hline +(3y + 2)x \end{array}$

$$= (x + y - 1)(x + 2y + 3)$$

この程度の問題は数学が得意な生徒は難なく解くことが出来ました。

しかし、次の形は少々難しすぎたようです。

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6 \\ = 2x^2 - (5y - 1)x - (3y^2 - 11y + 6) \\ = 2x^2 - (5y - 1)x - (3y - 2)(y - 3) \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} -2y \\ -9y \\ \hline -11y \end{array}$

そして、 $(3y - 2)$ と $(y - 3)$ を因数として式全体を因数分解する訳ですが、

- どちらに $2x$ をかけるか。
- どちらにマイナスをつけるか。

の2つを考えなければならないところが難しいようです。

こういうときは思い切って、 y の係数を -5 にすることに集中すると良いとアドバイスしました。

$$= \{2x + (y - 3)\}\{x - (3y - 2)\}$$

$\begin{array}{c} +(y - 3)x \\ +(-6y + 4)x \\ \hline +(-5y + 1)x \end{array}$

$$= (2x + y - 3)(x - 3y + 2)$$

4 教師のテクニック

中々外々の因数分解の利点をもう1つあげるなら、視点の移動が途切れることがなく、生徒の注意が途切れる心配も減ることです。

それに対して、1であげた(1)~(4)のような失敗をさせないということや、生徒の注意を途切らせないということも教師の技量であり、生徒ができないなら教師の指導が不十分なのだ、という意見もあることでしょう。

少し話が横道に逸れますが、大々的に電動アシスト自転車売り出そうというテレビ番組で、ゲストに試乗してもらっていたときの事です。試乗した女性タレントの1人が、

「あ、コツが分かった」

と言ったのです。すると、メーカーの社員がすかさず、

「コツなんかありません！」

と強く否定したのです。その社員はその後数回、コツは無いと繰り返していました。これから売り出そうとしているのは、「誰にでも簡単に乗れる乗り物で、コツがいるなんてもっての外！」そういった思いが社員に、必死でコツの存在を否定させたのでしょう。

因数分解の方法も、教師のテクニックで補って、分かりやすく教えればいけないか、という考えもあるかもしれませんが、初めからわかりやすければ、なお良いと思うのです。普通の自転車よりも、電動アシスト自転車の方が、乗って楽チンなように。

ご質問、ご意見等ございましたら以下までお願い致します。s.wd10@chiba-c.ed.jp
ブログもやっていますので、よろしかったら見て下さい。

<https://blogs.yahoo.co.jp/dendero2nd>