指数・対数関数の微分の指導法

－三省堂の方法とその考え方－

若松高等学校　木村 謙二

1　従来の指導法とその問題点

指数・対数の指導法といえば，まず対数関数の微分を学習（その際，極限値 e について定義）し，その後対数微分法を用いて指数関数の微分を学習する。この学習方法とその手順について疑問視した方はいないだろうか。まずはその問題点について指摘してみよう。

① e のもつ意味がわかりにくい。
② 指数が先の方が自然ではないか。
③ 導関数の定義に従って行う対数関数の微分の変形が技巧的すぎる。

そこで，指数関数の微分から学習し，指数の微分の特殊性（ほぼ自分自身になる）を強調することで e の意味を認識しやすくなる方法がないか考えた。

2　三省堂の方法

これをもとに，2011 年に以下の考えをまとめたのだが，何人かに見てもらうとどこかで見た気がするという指摘を受けた。そこで調べていくと，今はなき三省堂の教科書にたどり着いた。三省堂の教科書は東大を中心とした有志によって管理されていたので，そこに申請をして閲覧させてもらった。

まさにこれだった。指数の微分からの学習であった。自分自身この教科書の影響を受けていたのかもしれない。そう思うと，この指導法はお蔵入りだろうと判断し，封印してしまったのだった。

しかし，近年若い教員が増えてきて考えを改めた。三省堂の方法を紹介するだけでもいいのではないかと。そして，私なりの指導法上の工夫を加えてまとめることにした。

3　指数関数を微分する

定義に従って指数関数を微分してみると

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\cdot a^x$$

となる。この式を最初に見たとき，正直困った。この極限をどうやって求めればいいのか皆目見当がつかない。だが，x と h が分離しているので何かいい状態になっているはずだとの直感があった。そこで色々試しているうちに突破口が開けた。

だが，非常に技巧的な方法なので，こんな方法で生徒に示しても逆効果ではないかとの思いもあった。そして，無理して極限値を求めなくてもいいのではないかとの発想に至った。すなわち，この極限値は簡単には求められないが，収束することは容易に想像できる。背理法を用いれば，この極限が発散することは，元の関数の接線の傾きから考えてありえないからである。また極限値が 0 になってしまうこともない。とすると，ある 0 でない実数の極限値 k が存在し，$k=\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ とおけることが容易に想像できる（この時点では予想でよい）。

よって，$(a^x)'=k\cdot a^x$ と考えられる。数学的感覚からすると，極限値を先に考えたくなるが，この段階で一度まとめておくことが肝要ではないだろうか。これは非常に美しい状態であると強調しておきたい。

「指数関数の微分は自分自身に比例する」

そこで，特に美しい場合はといえば，当然 $k=1$ のときと推測できる。そして，そのときこそ e の出番である。すなわち，指数関数 $y=a^x$ の導関数が完全に自分自身になる底 a こそが e である。このようにして e の意味を考えれば，生徒も理解しやすいのではないだろうか。

ちなみに，三省堂の方法では，2^x の微分を実験的に考えると，自分自身の 0.7 倍になると予想し，「自分自身に比例」を強調している。また実験的手法により $f'(0)=1$ となる場合を考え，$2.4<a<2.8$ と e を近似的に考えていく手法をとっている。

4　極限値を考える

極限値を予想しただけで，e を定義していないではないかとお叱りを受けると思うので，ここで極限値を確認しておこう。

$a^h-1=t$ とおけば，$h=\log_a(1+t)$ である。また，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ であるから

$$k=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

と変形できる。よって，e の定義

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

が導かれ，これを用いて $k=\dfrac{1}{\log_a e}=\log a$ を導くことができる。

通常の対数関数の微分では，$\dfrac{h}{x}=t$ のように置き換えるが，x までも含めて置き換えることに若干の不安を覚えないだろうか。指数の方法では x は完全に分離しているので，安心できる強みがある。

参考文献

[1] 岡部靖憲ほか，数学 III，三省堂，1999