

「ガロア理論」と高校数学 その2

— ギリシャ三大作図問題の解決と正多角形の作図 —

千葉商業高等学校 島上 直人

1 はじめに

本稿は $\alpha - \omega$ 第 53 号 (2015 年) 『ガロア理論と高校数学— 2 次方程式を用いてガロア理論を読み解く—』の続編である。数学の理論の中でも難解と言われるガロア¹⁾理論は、2000 年来のギリシャ三大作図問題を解決し、自然科学を中心に様々な分野で応用されている。前稿においては、高校数学の中から見えてくるガロア理論について焦点を当てたが、本稿においてはガロア理論によって裏付けされる高校数学を垣間みようとする試みである。

ガロアが証明したことは、

5 次以上の代数方程式には解の公式が存在しない

である。つまり、「2 次、3 次、4 次方程式は係数の加減乗除（四則演算）と平方根（2 乗根）、立方根（3 乗根）などのベキ根をとる操作で解を求めることはできるが、5 次以上の方程式ではそのような操作で解を得ることはできない。」ということである。²⁾授業中に「2 次方程式の解の公式」や「因数定理による高次方程式の解法」を扱う際には必ず余談で触れている。さらには、「そして、このガロア理論は 2000 年以上も未解決であったギリシャ三大作図問題を解決したんだよ。」と付け加えると多くの生徒から、「3 次方程式や 4 次方程式の公式はどうして高校の数学では扱わないの?」とか「図形（幾何）の問題を計算（代数）で解決するって、どうしたらできるの?」といった質問を受けることが多い。そこで、これらの疑問に対して教材開発を試みた。

2 3 次方程式の解の公式

3 次方程式 $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ の解は、 x を $x - \frac{a_2}{3}$ で置き換えると x^2 の項が消え、 $x^3 + px + q = 0$ という形になり、これを解けば、 $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ の解も求めることができる。「カルダノ³⁾の公式」 $x^3 + px + q = 0$ の解は、1 の三乗根を ω として、

¹⁾ Évariste Galois(1811-1832) フランスの数学者、革命家。

²⁾ ノルウェイの数学者 Niels Henrik Abel(1802-1829) もほぼ同時期に証明している。

³⁾ Gerolamo Cardano(1501-1576) イタリアの数学者、医者、占星術師、賭博師、哲学者。

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
 &, \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
 &, \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
 \end{aligned}$$

である。この公式の証明を2次方程式の解と係数の関係から導き出してみよう。

問1 $x^3 + px + q = 0$ の解を次のアンダーラインを埋めて求めよ。

$$\begin{aligned}
 (\text{解}) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
 &= (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z)
 \end{aligned}$$

と因数分解される。 $x^3 + px + q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ の係数から、

$$\begin{cases} -3yz = p & \text{より, } y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27} \\ y^3 + z^3 = q & \text{より, } (y^3)^2 + y^3 z^3 = qy^3 \end{cases}$$

から、 y^3 の2次方程式

$$(y^3)^2 - qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

を得る。これを解くと、 $y^3 =$ _____

z^3 は y^3 の解のうちのひとつだから、

$$y^3 = \underline{\hspace{10em}}, z^3 = \underline{\hspace{10em}}$$

とにおいて、3乗根を用いて、

$$y = \underline{\hspace{10em}}, z = \underline{\hspace{10em}}$$

$x + y + z = 0$ より

$$x = -y - z$$

$$= \underline{\hspace{10em}}$$

$x + \omega y + \omega^2 z = 0$ より

$$x = -\omega y - \omega^2 z$$

$$= \underline{\hspace{10em}}$$

$$x + \omega^2 y + \omega z = 0 \text{ より}$$

$$x = -\omega^2 y - \omega z$$

$$= \underline{\hspace{10em}}$$

(解終)

さて、この3次方程式の公式は一般的ではなく、高校でも取り上げられない。その理由を次の問題で考察してみよう。

問2 3次方程式 $x^3 - 6x + 4 = 0$ をカルダノの公式により求めよ。

(解答)

$$\begin{aligned} -y &= \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 + 2i} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi\right)^3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i \\ -z &= \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 - 2i} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi\right)} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{21}{4}\pi + i \sin \frac{21}{4}\pi\right)} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)^3} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 - i \end{aligned}$$

よって、

$$x = (1 + i) + (1 - i) = 2$$

$$, (1 + i)\omega + (1 - i)\omega^2 = (1 + i)\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + (1 - i)\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

$$, (1 + i)\omega^2 + (1 - i)\omega = (1 + i)\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + (1 - i)\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

答 $x = 2, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$

この結果では、3つの解はすべて実数である。ところが、途中の計算には虚数単位 i が必要になってくる。つまり、 i を認めないと計算を途中でやめなければならないが、そうすると $-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$ という実数の解は見つからない。2次方程式では虚数を認めなくてもつじつまが合うが、3次方程式では i を認めないと実数の解が得られないということである。この

ことは虚数なしではこれからの方程式は扱えないということである。また、この問題では、因数定理を使って、 $2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$ によって解のひとつが $x = 2$ であることがわかれば、3 次方程式の解の公式を使わなくてもよい。つまり、3 次方程式の解法は、可約多項式ならば因数定理を利用した方が 3 次方程式の解の公式を用いるより圧倒的に効率が良いことがわかる。

2 次方程式の解の公式が発見されてから、3 次方程式の解の公式が発見されるまで数千年の時を要している。古代バビロニアの時代から、 $x^2 = -1$ のような虚数解を持つ 2 次方程式自体は知られていたが、こうした方程式は単に『解なし』として片付けられて来た。2 乗してマイナス 1 になる数なんて、“実際に”存在しないのが理由であった。その後カルダノの公式に至るまでの数千年間、誰一人として『2 乗したらマイナス 1 になる数』を仮にでも計算に導入することを思いつかなかった。ところが 3 次方程式の解の公式には、 ω , ω^2 として複素数が出てくる。たとえ三つの実数解を持つ 3 次方程式に対しても公式通りに計算を進めていけば途中で複素数が顔を出す。ここで『2 乗したらマイナス 1 になる数』を一時的に認めるという気持ち悪さを我慢すれば、何行か計算を進めれば再び複素数は姿を消し実数解に至ることもあるという訳だ。

問 3 3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ をカルダノの公式により求めよ。

(解) $x = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\omega + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}\omega^2, \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\omega^2 + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}\omega$
「3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解」と「角の 3 等分の作図が一般的には不可能である」は密接な関係があることに話を進めていこう。

3 ギリシャ三大作図問題

中学数学や「数学 A」でも扱う作図は、定規とコンパスだけを有限回使って図形を描くことを指す。ここで、定規は 2 点を通る直線を引くための道具であり、目盛りがついていても長さを測るのには使わないものとし、コンパスは与えられた中心と半径の円を描くことができる道具である。西暦前 500 年から 400 年頃のギリシャ全盛時代のソフィストの三大問題とは、

- 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること (円積問題)
- 与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作ること (立方体倍積問題)
- 与えられた角を 3 等分すること (角の 3 等分問題)

角の 3 等分問題と立方体倍積問題はワンツェル (1837)⁴⁾ が不可能を証明した。ただし、特定の角 (例えば 90°) には角の 3 等分の作図法が存在する。円積問題は 1882 年リンデマン⁵⁾ が不可能を証明した。これらはガロア理論による抽象代数を利用して証明された。

⁴⁾ Pierre Laurent Wantzel(1814-1848) フランスの数学者。

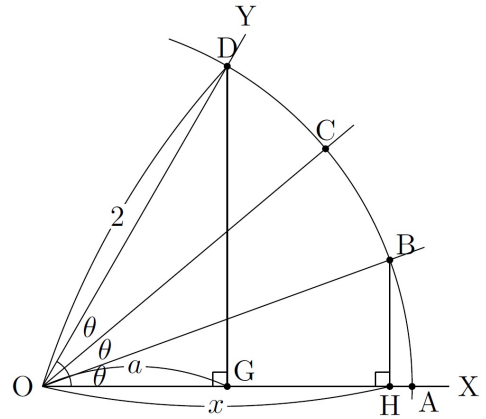
⁵⁾ Carl Louis Ferdinand von Lindemann(1852-1939) ドイツの数学者。

(1) 角の3等分の問題は3次方程式を解くこと

角の3等分の問題について話を進めていこう。与えられた $\angle XOY$ を正確に3等分することが可能かを考える。O を中心として半径2の円を描き、角の二辺および3等分線との交点を図のように A, B, C, D とする。OB と OC は $\angle AOD$ を3等分するとし、点 D から OA への垂線の足を点 G, 点 B から OA への垂線の足を点 H する。

$$OG = a, \quad OH = x$$

とするとき、角の3等分問題は、 x と a の関係式を求め、 x を a によって表すことに他ならない。



問4 この図形において x, a の関係式が $x^3 - 3x - a = 0$ となることを示せ。

解答は初等幾何を用いて容易に証明できるので省略する⁶⁾。これを角の三分方程式という。 a は与えられた値であり、これによって点 H が定まり、さらに点 B が定まる。これにより、 $\angle XOY$ を3等分できたことになる。つまり、与えられた角を3等分するとは、3次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$ を解くことに他ならない。

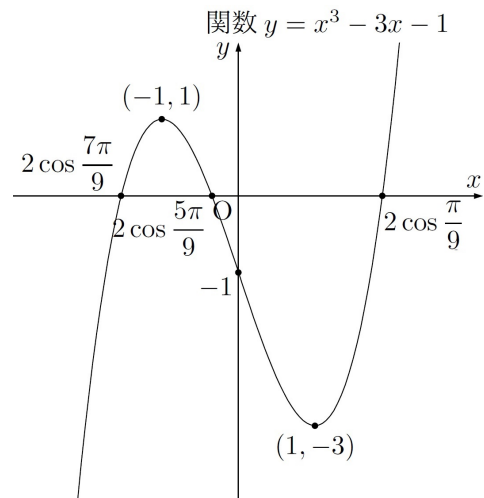
ここで、 $a = 1$ としたとき、すなわち問3の3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ を解くことは、 60° の角の3等分を作図することに他ならない。

関数 $y = x^3 - 3x - 1$ のグラフは数学IIの微分により極値を求めることによって容易に書くことができる。グラフによると3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ は異なる3個の実数解をもつことも解る。問3で求めた解は3個とも実数であったのだ。この3次方程式をカルダノの公式ではなく、ビエタの方法で解いてみよう。

問5 3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ を $x = 2 \cos \theta$ とおき、三倍角の公式 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ を利用して解け。

$$(\text{解}) \quad x = 2 \cos \frac{\pi}{9}, 2 \cos \frac{5\pi}{9}, 2 \cos \frac{7\pi}{9}$$

明らかに、3個とも実数であることがわかる。これら3つの解の大小関係を考えれば、正となる値 $2 \cos \frac{\pi}{9} = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}}$ が「作図できる数」であるかどうかの問題になるのだ。見た目でも「作図」できそうにないが、「作図できる数」とはどのような数なのかを考察していこう。



⁶⁾ 矢野 健太郎, 一松 信 (2008) 角の3等分 (ちくま学芸文庫) 参照

(2) 作図可能な数「ユークリッド数」

「数学 II」の図形と方程式において、「直線の方程式」と「円の方程式」を扱う。「直線＝定規」「円＝コンパス」であり、交点の座標となる数を「ユークリッド数」と呼ぶ。このことについて話を進めていこう。

定義 1 作図可能な数

実数 $a \in \mathbf{R}$ が作図可能な数であるとは、点 $(a, 0)$ が作図可能な点であること。

定義 2 ユークリッド数

実数 $a \in \mathbf{R}$ がユークリッド数であるとは、ある有理数から四則演算と正の平方根をとるという操作を組み合わせて表される数であること。ユークリッド数全体を \mathbf{E} とあらわす。

定義 3 ユークリッド点

点 $P(a, b)$ がユークリッド点であるとは、 $a, b \in \mathbf{E}$ であること。

定義 4 ユークリッド直線

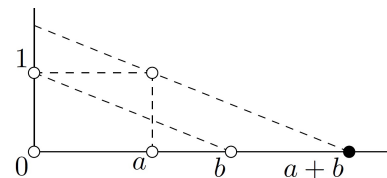
直線 $L: ax + by + c = 0$ がユークリッド直線であるとは、 $a, b, c \in \mathbf{E}$ であること。

定義 5 ユークリッド円

直線 $L: (x - a)^2 + (y - b)^2 = c$ がユークリッド円であるとは、 $a, b, c \in \mathbf{E}$ であること。

問 6 a と b が作図可能な数のとき、次のことを証明せよ。

- (1) $a + b$ は作図可能な数である。
- (2) $a - b$ は作図可能な数である。
- (3) $a \times b$ は作図可能な数である。
- (4) $b \neq 0$ のとき、 $a \div b$ は作図可能な数である。
- (5) $a > 0$ のとき、 \sqrt{a} は作図可能な数である。



(解答) (1) $(a, 0)$ が作図可能なら、 $(a, 0)$ での x 軸の垂線と直線 $y = 1$ との交点をとって、 $(a, 1)$ を与えることができる。 $(0, 1)$ と $(b, 0)$ を結ぶ直線ととり、この直線と $(a, 1)$ を通る平行線との交点をとればそれが $(a + b, 0)$ である。 $0 < a < b$ の場合を図で示せば右上図のようになる。(2) から (4) まで同様に証明できる。

(5) $(a, 0)$ が作図可能なら、 $P\left(\frac{a-1}{2}, 0\right)$ を与えることができ、 P を中心に $(a, 0)$ 通る円の方程式は $\left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$ 。これは、 $x^2 - (a-1)x + y^2 = a$ となるので、この円と y 軸との交点が $\pm\sqrt{a}$ となる。(解答終)

問 7 次のことを証明せよ。

- (1) P と Q がユークリッド点ならば, PQ を結ぶ直線はユークリッド直線である。
- (2) P と Q がユークリッド点ならば, P を中心に Q を通る円はユークリッド円である。
- (3) 相異なるユークリッド直線が交われば, その交点はユークリッド点である。
- (4) ユークリッド円とユークリッド直線が交わる, または接すれば, その交点または接点もユークリッド点である。
- (5) ユークリッド円が交わる, または接すれば, その交点または接点もユークリッド点である。

(解答略) これは数学 II 「図形と方程式」における「点と直線」や「円」から明らかである。2 次方程式の解は, 有理数と有理数の平方根を用いて表すことができる 2 次体⁷⁾であるということにほかならない。

定理 1 (作図の必要十分条件)

$a \in \mathbf{R}$ が作図可能な数であるための必要十分条件は, $a \in \mathbf{E}$ (a がユークリッド数) となることである。

十分条件, 必要条件とも上記演習で述べられている。点 (a, b) が作図可能かどうかは, a, b を有理数として, 加減乗除と正の平方根のみを使って表すことができるかどうかで判定できる。よって, もし点 (a, b) が作図可能ならば, その点の座標は有理数から初めて何度かの 2 次以下の方程式を解くことで求められ, 有理数 a, b を加減乗除と正の平方根を使って表すことができるのだ。厳密には「拡大次数」を定義することにより「体の列」として表現し, 中間体が 2 次拡大であることを示す必要がある。⁸⁾

問 8 60° の角の 3 等分の作図に必要な, 3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の正の実数解がユークリッド数であるか確認せよ。

$$\cos \frac{\pi}{9} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}}$$

(解答) 加減乗除と正の平方根のみを使って表すことができないので, ユークリッド数ではない。このことは 60° の角の 3 等分は作図できないことを示している。(解答終)

(3) 立方体倍積問題の解決

ギリシャ三大作図問題のひとつ「与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作ること (立方体倍積問題の解決)」も, 角の 3 等分の作図が一般的には不可能であることを証明したユークリッド数であるかどうかを利用すれば良い。

⁷⁾ $\alpha - \omega$ 第 53 号「ガロア理論と高校数学」を参照

⁸⁾ 小林俊一 (2013), 「ガロア理論」, 共立出版, pp70-71

問 9 一辺の長さが a である立方体について次の問に答えよ。

- (1) この立方体の 2 倍の体積を求めよ。
- (2) この立方体の 2 倍の体積となる立方体の一辺の長さを求めよ。
- (3) 立方体倍積問題を解決せよ。

(解答) この立方体の 2 倍の体積は $2a^3$ であるから、一辺の長さは $\sqrt[3]{2a}$ である。 $\sqrt[3]{2a}$ はユークリッド数ではない。よって、与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作図により作ることは不可能である。(解答終)

(4) 円積問題の解決⁹⁾

円周率 π の無理数性の証明は、ランベルト¹⁰⁾(1767) により証明され、ルジャンドル¹¹⁾(1794) により厳密に証明された。さらにオイラー¹²⁾(1775) が「超越数」、すなわち無理数だけでなく、代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

の根でもない数の存在を示唆してから約 50 年後、エヴァリスト・ガロアは死に至る決闘(1832/5/31)の前夜に論文¹³⁾を唯一の親友といわれるオーギュスト・シュヴァリエに託した。これがジョゼフ・リウヴィル¹⁴⁾の手に渡り、リウヴィルはその後の半生をかけて「ガロア理論」の発掘に尽力する。リウヴィルはついに、超越数の存在を証明(1844)した。その後リンデマン(1844)により π の超越性が証明された。このことは同時に「円積問題」の解決も意味している。半径 r の円の面積 πr^2 は、 π が超越数であるからユークリッド数ではない。 $\sqrt{\pi}$ も超越数でありユークリッド数でないから $\sqrt{\pi}$ を作図することは不可能である。

超越数が存在し、 π の超越性が示されれば「円積問題」すなわち円と同じ面積の正方形を作図することが不可能になることを与える。ギリシャ人は定規とコンパスだけを使って、有限回の操作で円を正方形にすることを主張していた。デカルト¹⁵⁾による解析幾何より、そのような作図の可否を解析的に決定できる可能性が生じた。つまり、なにも定規とコンパスを使わなくても円はその長さを求められるならば正方形にすることができる。コンパスと定規だけしか使えないときには直線と円しか描けない。直線や円の方程式は、高々 2 次の代数方程式である。つまり、つぎつぎに組み合わせた作図によって得られる点は、つねに高々 2 次の曲線の交点である。高々 2 次の曲線を使う作図によって、高々 2 次の方程式の解である 2 曲線の交点を見出す。これらの根は平方根のみを含む有理数か無理数である。つまり、超越数ではない代数

⁹⁾ 塩川宇賢(1999), 無理数と超越数, 森北出版

¹⁰⁾ Johann Heinrich Lambert(1728-1777) ドイツの数学者・物理学者・化学者・天文学者。地図のランベルト正積方位図法を考案した

¹¹⁾ Adrien Marie Legendre(1752-1833) フランスの数学者。統計学, 数論, 代数学, 解析学で様々な功績を残した。ガロアの論文を 2 度も紛失している。

¹²⁾ Leonhard Euler(1707-1783) 数学者・天文学者・物理学者。18 世紀の数学の中心となり, 続く 19 世紀の厳密化・抽象化時代の礎を築いた。

¹³⁾ 数学的な発想(ガロア理論の「原始的方程式」への応用や楕円関数に関するモジュラー方程式の考察, リーマン面理論の超越関数理論への応用)

¹⁴⁾ Joseph Liouville(1809-1882) は, フランスの物理学者, 数学者。

¹⁵⁾ René Descartes(1596-1650) フランスの哲学者, 数学者。「方法序説」の著者

的数である。 π がどんな代数方程式の根にもならないような数であるならば定規とコンパスによって円周の長さを求めることは不可能となる。

4 正多角形の作図

「万物は数である。」と主張したピタゴラス¹⁶⁾学派が、「すべての数は有理数で表すことができる」と無理数の存在を否定したことと同様に、古代ギリシャ以降においては、すべての図形を、コンパスと（目盛りのない）定規によって作図しようと試みた。エウクレイデス¹⁷⁾が著した『ユークリッド原論』によると、正3角形と正5角形、この2つの正多角形の頂点の数の最小公倍数の値と同じ数の頂点を持つ正15角形、正方形、およびこれらの頂点の数の2の冪を乗じた数の頂点を持つ正多角形が作図可能である事が記されていた。つまり、「ユークリッド原論」による作図可能な正多角形は、正3角形、正方形、正5角形、正6角形、正8角形、正10角形、正12角形、正15角形、正16角形、正20角形…であった。

ユークリッドの時代から2000年余りを経たしのことである。「1796年3月30日の朝、19歳の青年ガウスが目覚めて臥床から起き出ようとする刹那に、正17角形の作図法を思いついた。¹⁸⁾」1796年という、ガロアが生まれる15年も前のことである。

問10 ガウスが正17角形の作図に利用した式がユークリッド数であるか確認せよ。

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} + \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 6\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17}(34 - 2\sqrt{17})}}{16}$$

(解) ユークリッド数である。このことは正17角形は作図可能であることを示している。

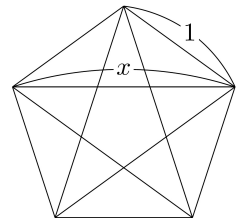
(1) 単純な正多角形の作図

問11 正3角形と正方形、正6角形を作図せよ。

これらは容易であるので解答は略す。正5角形の作図について考えてみよう。まずは、正5角形を作図するための準備から。

問12 一辺の長さが1である正5角形において、対角線の長さを求めよ。(黄金分割)

(解) $1 : x - 1 = x : 1$ より、 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



¹⁶⁾ Pythagoras, B.C.582-B.C.496

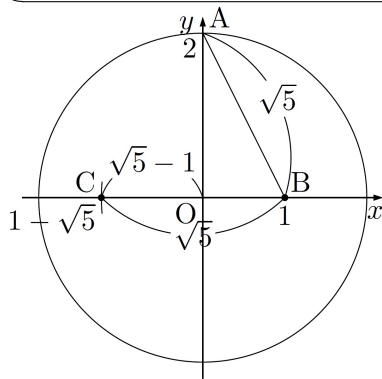
¹⁷⁾ Eukleidēs 英語表記 Euclid(紀元前3世紀?) 古代ギリシアの数学者、天文学者。

¹⁸⁾ 高木貞治(1996), 近世数学史談, 共立図書

問 13 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を示せ。また、半径 2 の円に内接する正 5 角形の一辺の長さは $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ となることを示せ。

(解) 問 12 より、 $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ より明らか。半径 2 に内接する正 5 角形の一辺の長さは、 $2 \times 2 \times \sin 36^\circ$ である。

問 14 次の図 (半径 2 の円) を参考に正 5 角形を作図せよ。



(解) 図において $AC = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ である。

ガウスは正 17 角形の作図を考案するとともに、1801 年に出版した『整数論の研究』において、正 n 角形が作図可能であるための必要十分条件を示した。

n が 2 の冪と相異なるフェルマー素数の積、すなわち

$$n = 2^m \cdot F_a \cdot F_b \cdots F_c$$

(F_a, F_b, \dots, F_c は全て異なるフェルマー素数、 m は非負整数) の形である。

(2) 正 n 角形が作図可能であるための必要十分条件

ガウス (1796) による正 17 角形の作図可能性の証明の後、ワンツェル (1837) はガロア理論によって、フェルマー数 $p = 2^{2^e} + 1$ が素数ならば正 p 角形が作図可能であることを証明した。現在 (2017 年) のところフェルマー数 $p = 2^{2^e} + 1$ が素数となる最大の e の値は $e = 4$ であり、 $2^{2^4} + 1 = 63357$ より、正 63357 角形も作図できるのだ。このことについて話を進めていこう。

(3) フェルマー素数

フェルマー¹⁹⁾は $n = 0, 1, 2, \dots$ に関して「 $F_n = 2^{2^n} + 1$ は素数である」と予想した。

問 15 次のフェルマー (素) 数を計算し、素数であるかどうか判定せよ。

- (1) $F_0 =$ (2) $F_1 =$ (3) $F_2 =$
 (4) $F_3 =$ (5) $F_4 =$ (6) $F_5 =$

(解) (1) $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$ 素数, (2) $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ 素数, (3) $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$ 素数, (4) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$ 素数, (5) $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$ 素数, (6) $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ より素数でない。

フェルマー数 F_5 が合成数であることはオイラー (1732) によって示された。それ以降、65537 を超えるフェルマー素数は現在に至るまで見つかっていない。つまりフェルマー素数は、5 個 (3, 5, 17, 257, 65537) のみしか発見されていないのである。そのフェルマー素数がガウスによって再び脚光を浴びることになる。

¹⁹⁾ Pierre de Fermat (1601-1665) フランスの数学者フェルマーの最終定理が有名。アンドリュー・ワイルズ (1953-) により証明された。

定理 2 p が素数で、 $p = 2^n + 1$ という形の数であるとする。このとき、正 p 角形を作図することができる。 $(p = 2^n + 1$ という形の数の素数はフェルマー素数である。)

(証明) $n \in \mathbf{N}$ のとき、整式 $x^{2^n-1} + 1$ は $x+1$ を因数にもつことは明らかで、 d が 1 より大きい奇数 s を約数にもつ、つまり $d = ts$ と表されたとすると、整式 $2^d + 1 = 2^{ts} + 1 = (2^t)^s + 1$ は $2^t + 1$ を因数にもつから、

$$2^n + 1 = 2^{ts} + 1 = (2^t)^s + 1 = (2^t + 1) \{2^{t(s-1)} - 2^{t(s-2)} + 2^{t(s-3)} \dots - 2^t + 1\}$$

と積に分解できる。ゆえに、 $2^n + 1$ は素数ではない。よって、 $p = 2^n + 1$ が素数であれば、 n には奇数の素因数をもたず、すなわち 2 の累乗であるから、 $n = 2^e$ と表される。つまり、そのような素数 p は $p = 2^{2^e} + 1$ と書けるので、フェルマー素数となる。(証明終)

フェルマー素数が作図可能であることの証明には「自己同型群の位数の $[L:K]$ 」「ガロア拡大」「円分拡大」「単数群」「固定部分群」「有限アーベル群の部分群の位数」の概念の導入が不可欠で高校生に説明するのはかなり敷居が高い。

証明の方向性は、1 の原始 n 乗根 ζ_n のガロア群の構造が、ユークリッド数が作図可能である理由と同様に、2 次拡大の繰り返しによって得られる。正確な証明は、木村 [5] pp148-151 を参照のこと。ここで、

- $e = 0$ のとき、 $p = 2^{2^0} + 1 = 3$ であり、正 3 角形であり、ユークリッド原論に作図が書かれている。
- $e = 1$ のとき、 $p = 2^{2^1} + 1 = 5$ であり、正 5 角形であり、ユークリッド原論に作図が書かれている。
- $e = 2$ のとき、 $p = 2^{2^2} + 1 = 17$ であり、正 17 角形であり、ガウスが発見した。

なお、ガウスは $e = 3$ のときの $p = 2^{2^3} + 1 = 257$ の正 257 角形や $e = 4$ のときの $p = 2^{2^4} + 1 = 65537$ の正 65537 角形も作図可能であることも言及している。65537 を超えるフェルマー素数は現在に至るまで見つかっていないので、

今のところ (2017 年現在) では、作図できる正 n 角形 ($n \geq 3$) は、自然数 m に対し、 $2^m \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537$ の約数になる n である。

つまり、正 9 角形は作図できないが、正 15 角形は作図できるということである。正 15 角形は作図はギリシャ時代に既に考案されている。ガウスは正 17 角形の作図を発見し、さらに、フェルマー素数は作図できる正多角形であると考えていた。

問 16 100 以下の作図できる正多角形をいえ。

(解) 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96

問 17 正 15 角形の作図法を調べよ。

問 18 正 17 角形の作図法を、ガウスがどのように考えたのか調べよ。

(解答略) どちらの作図法に関しても、様々な文献で紹介されているのでそちらを参照のこと。

5 まとめ

授業中についつい余談として話す、「ガロアは5次以上の方程式には解の公式がないことを証明したんだよ。」「ギリシャ三大作図問題は、ガロア理論による抽象代数によって証明されたんだ。」「19歳のガウスが朝目覚めたときに思いついた正17角形の作図は、2000年以上もできないとされていたんだよ。これもガロア理論で証明できるんだ。」に対しての生徒の反応や質問に対して話をするだけではなく、その根拠となるような教材を開発したいと思いつき、それをまとめたのが本稿である。プリントとして作成したのもあれば、黒板で説明したものもある。

数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深めるため、数学のよさを認識しそれらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てるためには、教科書の内容を説明し問題を解くことに加え、その内容がどのような意味を持つのかを説明する必要があると考えている。例えば「数学II」微分法において、「関数 $y = x^3 - 3x - 1$ の増減を調べ、グラフを書け。」の際には、単に問題を解くだけではなく、「角の3等分」の話題に触れることにより、数学の奥行きを深さを実感してほしいのだ。今回紹介したものはほんの一例に過ぎず、高校数学を俯瞰して授業を組み立てていく必要があると感じている。

今後も今回触れることのできなかつた「授業中につい余談で話してしまった内容」についての教材化についてまとめてみたい。

なお「定理1」および「定理2」は正確な証明には至っていない。紙面の都合と $\alpha - \omega$ の趣旨を勘案し割愛した。参考文献を参照いただきたい。

参考文献

- [1] Armstrong, M.A. (1988), Groups and Symmetry, Springer Verlag
- [2] H.S.M. コクセター, (2009), 銀林浩 (訳), 幾何学入門 (上), ちくま学芸文庫
- [3] 塩川宇賢 (1999), 無理数と超越数, 森北出版
- [4] 志賀浩二 (1989), 群論への30講, 朝倉書店
- [5] 木村俊一 (2013), 数学のかんどころ 14 「ガロア理論」, 共立出版
- [6] 瀬山士郎 (2014), 数学のかんどころ 27 「コンパスと定規の幾何学」, 共立出版
- [7] 草場公邦 (1989), ガロワと方程式, 朝倉書店
- [8] 渡辺敬一 (2012), 代数の世界 改訂版, 朝倉出版
- [9] エミール・アルティン, 寺田文行 (訳) (2010) ガロア理論入門, ちくま学芸文庫
- [10] 上野健爾 (2011), ガロアの考えたこと, 現代思想 2011vol39-4, pp38-58, 青土社
- [11] 藤田有加, 島上直人 (2015), $\alpha - \omega$ 第53号 (2015年) 『ガロア理論と高校数学 — 2次方程式を用いてガロア理論を読み解く — 』, 千葉県高等学校教育研究会数学部会