公式を忘れてしまったら－平方の和，立方の和

東金高等学校　細田 明良

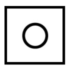
1　はじめに

生徒には，「数学の公式を忘れてしまったら，その場で導き出しなさい。」と指導しています。しかし，平方の和，立方の和の公式は，忘れてしまったときに，恒等式を使って導き出すには大変なので，その場で導くのに便利な方法を生徒に授業で紹介しています。

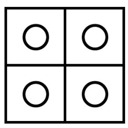
2　準備

奇数の和 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ を求めます。碁石○を並べて

1 は

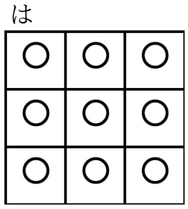


1+3 は



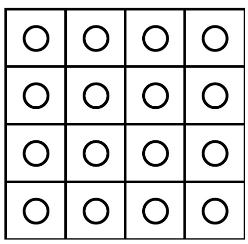
と並べられ，$1+3=2^2=4$

1+3+5 は



と並べられ，$1+3+5=3^2=9$

1+3+5+7 は



と並べられ，$1+3+5+7=4^2=16$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$(四角数) となります。

3　平方の和

$1^2+2^2+3^2+4^2$ を下図により求めます。

(1) 図 1 の上と下の●の個数がそれぞれ $1^2+2^2+3^2+4^2$ となります。

●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
⑦	●	●	●	●	●	●	●	●	●
⑦	⑤	⑤	●	●	●	●	●	●	●
⑦	⑤	⑤	③	③	③	●	●	●	●
⑦	⑤	⑤	③	③	③	①	①	①	①
⑦	⑤	⑤	③	③	③	●	●	●	●
⑦	⑤	⑤	●	●	●	●	●	●	●
⑦	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

図 1

(2) ①③⑤⑦の碁石を並べ替えると，個数がそれぞれ奇数なので (例えば⑤は縦に 5 個並んでいます。) 下記のように四角数となります。

①

③	①
③	③

⑤	③	①
⑤	③	③
⑤	⑤	⑤

⑦	⑤	③	①
⑦	⑤	③	③
⑦	⑤	⑤	⑤
⑦	⑦	⑦	⑦

①を 4 個，③を 9 個，⑤を 10 個，⑦を 7 個使って，上の図のように正方形を 4 個作れるので，①③⑤⑦の個数も $1^2+2^2+3^2+4^2$ となります。

(1)(2) より $S_4=1^2+2^2+3^2+4^2\cdots$(A) とおくと，

図 1 の●と①③⑤⑦の個数の合計は (碁石の総数)$=S_4+2S_4=3S_4\cdots$(∗) となります。

また，図 1 において，横の碁石の個数は，$1+2+3+4=\dfrac{1}{2}\times 4\times(4+1)\cdots$(B)

縦の碁石の個数は，$4\times 2+1\cdots$(C) となります。

これらを一般化します。
(A) より $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ とおく。
(B) より (横の碁石の個数）$=1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$
(C) より (縦の碁石の個数)$=n \times 2 + 1 = 2n + 1$
また (∗) より (碁石の総数)$=3S_n$ なので (横の碁石の個数)×(縦の碁石の個数) を計算して，
$3S_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$
ゆえに，$S_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

4　立方の和

$1^3 = 1$
$1^3 + 2^3 = 9$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$
を生徒に示し，何か規則性がないか考えてもらいます。
生徒は，立方の和が $1 = 1^2$，$9 = 3^2$，$36 = 6^2$，$100 = 10^2$，$225 = 15^2$ となり，平方数になっていることに気づきます。すなわち，数列 1，3，6，10，15，$\cdots$ の一般項を a_n とすると，$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = a_n^2 \quad \cdots$(I)
そこで，数列 1，3，6，10，15，$\cdots$ の一般項 a_n を生徒に求めてもらいます。
階差数列 2，3，4，5，$\cdots$ より，一般項 a_n は，$n \geqq 2$ のとき
$a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots$(II)
（これは $n = 1$ のときも成り立つ）
(I)(II) より $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$
が導き出せます。（終わり）

5　参考文献

秋山仁，秋山仁の数学タイムトラベル，日本放送出版協会 (1995)，pp6-12