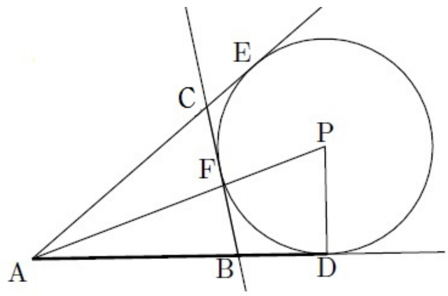
最近の入試問題3題についての考察

県立柏高等学校　西川 誠

まず，1 番目は，ヘロンの公式等に出てくる小さな s の隠れ場所を紹介します。2 番目は，ベクトルのなす角 θ を求めるときに出てくる $\cos\theta$ に関係する面白い表示方法の紹介です。3 番目は，複素平面の図形の話です。

1　小さな s の隠れ場所

△ABC の各辺の長さを，a，b，c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，三角形の面積がヘロンの公式を使って表示できる訳ですが，この小さな s がどこにあるかは，あまり有名ではないようです。1 章では小さな s がどこにあるかを示し，それを使って簡単に解ける大学入試問題を紹介します。



左の図は △ABC の傍接円で，点 D，E，F は接点とします。また，BC $=a$, CA $=b$, AB $=c$, BD $=$ BF $=x$，CE $=$ CF $=y$ と置くと
AD $=$ AE より　$c+x=b+y$　$\cdots$①
また BC $=$ BF $+$ FC より，　$a=x+y$　$\cdots$②
①から　$y=c-b+x$　$\cdots$③
③を②に代入すれば，　$a=x+c-b+x$ から
BD $=x=\dfrac{a+b-c}{2}$ となるので，
AD $=$ AB $+$ BD $=c+\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{a+b+c}{2}=s$ となります。

つまり AD の長さが，小さな s となる訳です。傍接円は 3 つありますが，どの傍接円であっても対応する頂点から接点までの距離が小さな s となります。また，PD $=r_A$(傍接円の半径) とすると，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r_A}{s}$ という表示も成り立ちます。

傍接円は，あまり入試でも出題されることが多くないので，この事実が書いてある本を見かけたことがありません。私は 7 年ほど前に，ある問題を解いているときに偶然気がつきました。数学って宝探しのようなものですから，こんな所に小さな s が隠れていたんだなーって少し感動したものです。ただ，この発見が役に立つような入試問題は，この 7 年間なかなか出会えなかったのです。それが最近，月刊誌「大学への数学」の 2017 年 6 月号の「感覚と注意力の極限」(安田亨先生) の中で，次のような入試問題に出会いました。小さな s を使わないと解けない訳ではないのですが，使うと簡単に解けるという問題です。

問題 1

$AB_1 = 8$，$B_1C_1 = 4$，$C_1A = 6$ の $\triangle AB_1C_1$ において，内接円 O_1 の面積を S_1 とする。辺 B_1C_1 に平行で内接円 O_1 に接する直線が辺 AB_1，辺 AC_1 と交わる点を，それぞれ B_2，C_2 とし，$\triangle AB_2C_2$ の内接円 O_2 の面積を S_2 とする。以下同様な操作を繰り返して，$\triangle AB_nC_n$ をつくり，その内接円 O_n の面積を S_n とする。ただし，n は自然数とする。以下の問に答えよ。

(1) $\sin A$ および $\sin\dfrac{A}{2}$ を求めよ。　(2) 内接円 O_1 の半径 r_1 を求めよ。

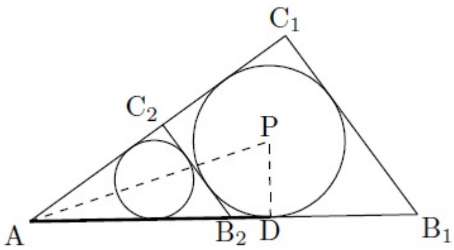
(3) 内接円 O_{n+1}の半径 r_{n+1} と内接円 O_n の半径 r_n との関係式を求めよ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。　(2017 年岐阜薬科大学)

(1) $\cos A = \dfrac{7}{8}$から，$\sin A = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{4}$ は，すぐ求まります。

(2) 内接円の半径と面積の関係から，$r_1 \times \dfrac{8+4+6}{2} = \dfrac{1}{2}\times 8\times 6\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}$となり，$r_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ も簡単に求まります。

(3) この (3) 番を解くのに「小さな s の居場所」が役に立ちます。



PD=$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ と $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{4}$ から，AD=5 をまず求めておきます。次に，「$\triangle AB_1C_1$ の内接円 O_1」は，「$\triangle AB_2C_2$ の傍接円」になっているので，$\triangle AB_1C_1$ と $\triangle AB_2C_2$ の相似比を $1 : k$ とすると，$\dfrac{(8+4+6)k}{2} = 5$ から，$k = \dfrac{5}{9}$ となり，これで，$r_{n+1} = \dfrac{5}{9}r_n$ であることがわかります。

安田亨先生の解答では，点 A から，直線 B_1C_1，B_2C_2 に下ろした垂線の足を利用して解いています。それが一番普通の解法なのでしょうが，この小さな s を利用するのも面白い解法だと思います。

(4) これは，公比 $\dfrac{25}{81}$ の無限等比級数となるので，答えは $\dfrac{135\pi}{56}$ となります。

2　$\cos\theta$ にまつわるアレコレ

(1)　$\tan\theta$ を求める問題

次に，2017 年に神戸大学・理系 (後期) で出題された問題をやってみましょう。この問題も，月刊誌「大学への数学」の 2017 年 6 月号 P51(安田亨先生の記事) で知りました。

問題 2

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ (n=1，2，3，$\cdots\cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。
2 つのベクトル $\overrightarrow{p_n}=(a_n, a_{n+1})$ と $\overrightarrow{p_{n+1}}=(a_{n+1}，a_{n+2})$ のなす角を θ_n とする。ただし，$0 \leqq \theta_n \leqq \pi$ である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (2)　$\tan\theta_n$ を n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ を示せ。ただし，必要であれば，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\theta<\tan\theta$ であることを用いてよい。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\theta_n$ を求めよ。

(1) 普通の 2 項間の漸化式で，$a_n=2^n-1$ とすぐ求まります。

(2) 私は，この (2) 番を解くのに，tan の加法定理を避けて $\cos\theta$ でやってもどうせ解けるだろうと思って，次のように計算を始めたのです。

$\overrightarrow{p_n}=\left(2^n-1，2^{n+1}-1\right)$ と $\overrightarrow{p_{n+1}}=\left(2^{n+1}-1，2^{n+2}-1\right)$ から，

$$\cos\theta_n=\frac{\left(2^n-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)+\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+2}-1\right)}{\sqrt{\left(2^n-1\right)^2+\left(2^{n+1}-1\right)^2}\sqrt{\left(2^{n+1}-1\right)^2+\left(2^{n+2}-1\right)^2}}$$

とやり，これから $\tan\theta_n$ を求めるだけですが $\cdots$。$2^n=M$ と置いたりして処理してもなかなか面倒です。時間に余裕がある方は挑戦してみて下さい。

とりあえず答えを書いておくと，$\tan\theta_n=\dfrac{2^n}{\left(2^{n+1}-1\right)\left(5\cdot2^n-2\right)}$ となります。

(3) と (4) の問題は簡単なので，ここでは (4) の答えが $\dfrac{1}{10}$ となることだけ書いておきます。

最近は，大学入試問題も解答付きで，手軽にインターネットで検索できる時代になったので，もう少し詳しい解説が知りたい場合は，大学への数学の 2017 年 6 月号をみるか，インターネットで検索してみて下さい。

(2)　$\cos\theta$ を求める非常に単純な公式

問題 3

xy 平面上で，3 点 O(0, 0)，A(a, b)，B(c, d) があり，$\alpha=ac+bd$，$\beta=ad-bc$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ を α，β で表せ。

$\cos\theta=\dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$ は公式として有名ですが，この分母を眺めていて
$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ という別の有名な等式を思い出したのです。ちなみに，この等式の証明は両辺を展開して比較すればすぐわかりますが $\cdots$ ，それよりも左辺を複素数の世界で因数分解して考えると $\cdots$,

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(\qquad)^2+(\qquad)^2$ を満たすような，式の (　　) の中を自分で作成することが出来てしまいます。

$$
\begin{aligned}
&\text{つまり}\quad \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) &&= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \quad \text{と因数分解して，}\\
&\text{順序を入れ替え} &&= (a+bi)(c-di)(a-bi)(c+di)\\
& &&= \{(ac+bd)-(ad-bc)i\}\{(ac+bd)+(ad-bc)i\}\\
& &&= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \quad \text{と証明できるのです。}
\end{aligned}
$$

なかなかすごい証明だと思いませんか？

ということで，$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ が求まりました。これが出ると，$\sin\theta, \tan\theta$ は簡単に出ますね。

ついでに，$\triangle$OAB の面積 S も含めて公式化すると，次のように表示出来ます。

> 平面での $\alpha\beta$公式 (これを$\alpha\beta$ 公式と名付けておきます。)
>
> xy 平面上で，3 点 O$(0, 0)$，A(a, b)，B(c, d) があり，$\alpha=ac+bd$，$\beta=ad-bc$，
> $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のなす角を$\theta$ とすると，
> $\cos\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{|\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\tan\theta=\dfrac{|\beta|}{\alpha}$，$S=\dfrac{|\beta|}{2}$

$\alpha=ac+bd$ は内積の値そのものですが，$\beta=ad-bc$ の値は，外積と呼ぶと「外積は，3 次元空間でしか定義しないのでは？」と叱られそうです。ただ，名称なんて人間の都合で付けているだけなのですから，もっと高度な数学を学ぶ時に何か不都合が生じたら変更すればいいだけの話で，この値を 2 次元の外積と定義してもいいと思いますが $\cdots$ どうなのでしょうか？

(a , b)
(c , d)

$ad-bc$ は，「たすきにかけて引いた値」となります。この値を使うと，面積 S の表示も簡単です。また「平行条件」が，「$ad-bc=0$」でちょうど面積 $S=0$ で三角形がつぶれてしまうときとなります。

β の方には絶対値が付いていますが，ベクトルのなす角 θは，$0\leqq\theta\leqq\pi$より $\sin\theta\geqq 0$ となりますから，符号の調節は内積 $\alpha=ac+bd$ の値が正か負かで判定させることにします。

この公式を使って 2 章 (1) の「問題 2」をやってみると $\cdots$

$\overrightarrow{p_n}=(2^n-1, 2^{n+1}-1)$ と $\overrightarrow{p_{n+1}}=(2^{n+1}-1, 2^{n+2}-1)$ から，

$\alpha=(2^n-1)(2^{n+1}-1)+(2^{n+1}-1)(2^{n+2}-1)=(2^{n+1}-1)(5\cdot 2^n-2)$

$\beta=(2^n-1)(2^{n+2}-1)-(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-1)=2^{2n+2}-5\cdot 2^n+1-2^{2n+2}+4\cdot 2^n-1=-2^n$

となります。β がマイナスということから，$\overrightarrow{p_n}$ の方が，$\overrightarrow{p_{n+1}}$ よりも x 軸 とのなす角が大きいことまでわかります。

これで，$\tan\theta_n=\dfrac{2^n}{(2^{n+1}-1)(5\cdot 2^n-2)}$ と求まります。

(3)　$\alpha\beta$ 公式の 3 次元への拡張

xyz 空間で，$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$ と $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$ があるとき，

$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$ とおけば，$\overrightarrow{c}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のどちらにも垂直になり，この $\overrightarrow{c}$ のことは，ちゃんと外積と名付けられていますね。

今度は $\beta=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$ とおきましょう。α は内積なので，$\alpha=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ です。

空間での $\alpha\beta$ 公式

xyz 空間で，$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ があるとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると
$\cos\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\tan\theta=\dfrac{\beta}{\alpha}$，$S=\dfrac{\beta}{2}$

平面との違いは，β のおき方が，最初からプラスになるようにおいたので，絶対値が不要になった所です。

証明は，$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$ を展開してみればわかるので省略します。これは，ラグランジュの恒等式として有名な等式です。もっと次数をあげた形でも成立します。

証明はともかく，数値実験でちょっと遊んでみます。

$(7^2+5^2+3^2)(11^2+10^2+6^2)=(77+50+18)^2+(30-30)^2+(33-42)^2+(70-55)^2=145^2+9^2+15^2=21331$ というように，「たすきにかけて引いた」ものが 1 つだけ 0 になるように設定すると，2 つの「3 個の平方数の和」の積が，また 3 個の平方数の和で表示できます。これを使って何か面白い整数の問題が作れるかもしれませんね。

(4)　相関係数と $\cos\theta$

相関係数の定義は，ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ を求める公式に対応しています。しかも相関係数の値が -1 から 1 の間になることは，コーシー・シュワルツの不等式そのものです。ただ，2 次元の場合の相関係数の値は，自由に値がとれる訳ではないという事実はあまり知られていないと思います。それを簡単な例で示してみます。

(例) A 君と B 君の 2 人の数学 (x) と英語 (y) のテストの相関係数を考えてみましょう。a，b を正でも負でも動ける実数として，次のような表を作成します。

(a，b が 0 だと相関係数の分母が 0 になってしまうので，除いておきます。)

	x	y	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	$\overline{x}+a$	$\overline{y}+b$	a	b	a^2	b^2	ab
B	$\overline{x}-a$	$\overline{y}-b$	$-a$	$-b$	a^2	b^2	ab
合計	$2\overline{x}$	$2\overline{y}$	0	0	$2a^2$	$2b^2$	$2ab$
平均	$\overline{x}$	$\overline{y}$	/	/	/	/	

相関係数は，$\dfrac{2ab}{\sqrt{2a^2}\sqrt{2b^2}}=\pm1$ となります。つまり「+1」か「-1」のどちらかにしかなりません。2 人だけでデータが 4 つしかない場合に，相関係数を調べてもあまり意味がないということなので，こんな事実はあまり本に書いてありません。これが，3 人になってデータが 6 個になると，相関係数は -1 から 1 までの任意の実数値を取ることが出来ます。(証明は簡単です。)

3　複素数平面上でのある方程式の表す図形について

最後に，2017 年の東北大・理系 (前期) で出題された問題をやってみます。大学への数学では，D ランクの難易度になっていた難問です。これをやる前に基本事項を整理しておきましょう。

基本①(円の方程式)

$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c=0$ は，c が $|\beta|^2-c>0$ を満たす実数であるときのみ，中心 $-\beta$ 半径 $\sqrt{|\beta|^2-c}$ の円を表す。

基本②(直線の方程式)

$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c=0$ は，$\beta\neq 0$ かつ c が実数であるときのみ，点 $\dfrac{-c\beta}{2|\beta|^2}$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{O}\beta}$ に垂直な直線を表す。

基本③(点と直線の距離)

直線$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c=0$ と z_0との距離 h は，$h=\dfrac{|\overline{\beta}z_0+\beta\overline{z}_0+c|}{2|\beta|}$である。

基本③は，あまり見かけない公式ですが，証明は簡単なので，解説は省略します。

問題 4

α，β，γを複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots(*)$ を満たす複素数 z を考える。

(1)　z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2)　$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ と仮定し，また，γ は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

一応解答を書いておきます。

(1) $z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots$①の両辺の複素共役をとると，$z\overline{z}+\overline{\alpha z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0\cdots$②となり，①－②を考えると $(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0\cdots$③が出てきます。

(2) γ は負の実数ですから，$\gamma=\overline{\gamma}$より，③の式は，$(\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}$となり，
これは，$(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$を意味しますから，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数とわかります。

(ア) $\alpha=\overline{\beta}$のとき，$(*)$ の式は，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となり，
$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})=\beta\overline{\beta}-\gamma$より，$|z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$
$|\beta|^2-\gamma>0$ なので，これは円を表します。
つまり，$(*)$ を満たす z は無数にあるので不適です。

(イ) $\alpha\neq\overline{\beta}$のとき，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$($k$ は実数) とおけるので，$z=\dfrac{k}{(\alpha-\overline{\beta})}$ を
$(*)$ に代入して整理すると$\cdots$(途中省略)$\cdots$計算途中に $|\alpha|=|\beta|$ を利用します。
結局 $k^2=-\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2$となり，$-\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2>0$ なので
これを満たす実数 k が 2 個存在し，z も 2 個あることになるので題意を満たします。

以上により，(2) の答えは$\alpha\neq\overline{\beta}$となります。

このレポートで紹介したいのは，この一番最初の式をもっと一般化するとどうなるかです。

問題 5

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots$①を満たす複素数 z を考えた場合に，どんな図形が出て来るのであろうか？

$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots$①　$z\overline{z}+\overline{\alpha z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0\cdots$②　から① − ②を考えると
$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0\cdots$③が出てきます。
この③の式は，$(\overline{\alpha}-\beta)\neq 0$ なら，③の表す図形は直線の式となります。
$(\overline{\alpha}-\beta)=0$ なら，③の表す図形は空集合か，または，全平面となります。
① + ②を考えると，$2z\overline{z}+(\alpha+\overline{\beta})z+(\overline{\alpha}+\beta)\overline{z}+\gamma+\overline{\gamma}=0\cdots$④　となり，
これは，$|\overline{\alpha}+\beta|^2-2(\gamma+\overline{\gamma})>0$ なら，④の表す図形は円の式となります。
この条件を満たさない場合は，④の表す図形は空集合か，または，1 点となります。

以上のことから①の表す図形は，③と④を同時に満たすものと考えて，空集合，1 点，円，異なる 2 点の 4 種類あることがわかります。

この中で，異なる 2 点になるための条件は，③が直線で，④がこの③の直線と異なる 2 点で交わる円であることが必要十分条件です。円と直線が交わる条件を求めるために点と直線の距離の公式も複素数版を作成した訳です。

東北大の問題では，$\gamma-\overline{\gamma}=0$ の場合なので，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0\cdots$③となり，$\alpha\neq\overline{\beta}$ なら③は，原点を通る直線となります。

一方，④の方も原点を内部に含む円となることがすぐわかりますから，$\alpha\neq\overline{\beta}$ なら異なる 2 点で交わることがわかります。

基本③(点と直線の距離) を使うなら，$\delta=\dfrac{\overline{\alpha}+\beta}{2}$，$\varepsilon=\dfrac{\beta-\overline{\alpha}}{2}$ とおいて処理すると楽です。

γ が実数で $\gamma<0$ に注意しながら計算すると，③が $\overline{\varepsilon}z+\varepsilon\overline{z}=0$ となり，
④が，$z\overline{z}+\overline{\delta}z+\delta\overline{z}+\gamma=0$ となります。これは，中心 $-\delta$，半径 $\sqrt{|\delta|^2-\gamma}$ の円です。

これで，点 $-\delta$ から直線 $\overline{\varepsilon}z+\varepsilon\overline{z}=0$ までの距離 h を基本③の公式で求めてやると，
$h=\dfrac{|\overline{\varepsilon}(-\delta)+\varepsilon(-\overline{\delta})|}{2|\varepsilon|}=\left|\dfrac{\overline{\varepsilon}\delta}{2\varepsilon}+\dfrac{\overline{\delta}}{2}\right|\leqq\left|\dfrac{\overline{\varepsilon}\delta}{2\varepsilon}\right|+\left|\dfrac{\overline{\delta}}{2}\right|=|\delta|$ となるので，
$h\leqq|\delta|<\sqrt{|\delta|^2-\gamma}$ $(\gamma<0$ に注意$)$ ですから，異なる 2 点で交わることがわかります。

仮定 $|\alpha|=|\beta|$ は，使わなくても解けるようです。例えば $|\alpha|\neq|\beta|$ で異なる 2 点で交わる図形になるものとして，$z\overline{z}+2z+6\overline{z}-10=0$ のような簡単な例がすぐ作れます。

参考文献

[1] 大学への数学, 東京出版, 2017 年 5 月号, 2017 年 6 月号