長方形と整数の性質について

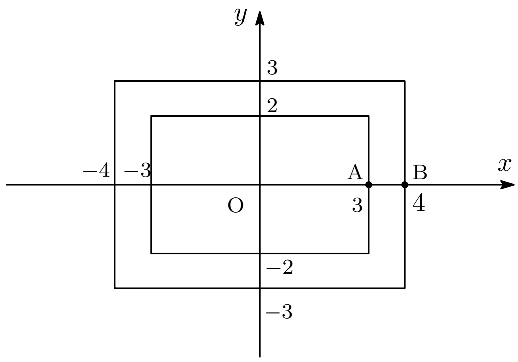
君津商業高等学校　小滝 真人

社会の情報化の進展は, 広範囲にまでますます高度化して, 数学の学習活動にもそれに対応したものや AI 技術を活用したものが現れている。数学 A の学習項目の中に,「整数の性質」,「図形の性質」,「場合の数と確率」があるが, これらの内容を使って, 身近な題材で解決できるものがないか, また, 課題学習の面からも, 次の図形上の点の位置情報を考察する。

問　図 1 において, 縦 4cm, 横 6cm の長方形の外側に縦 6cm, 横 8cm の長方形があり, 2 つの長方形の対角線の交点はともに原点で一致し, 縦は y 軸に平行, 横は x 軸に平行とする。

点 A$(3,0)$ を内側の長方形の辺上に, 点 B$(4,0)$ を外側の長方形の辺上にとり, 点 P は点 A から, 点 Q は点 B から, 同じ時刻に出発し, 時計の針の動きとは逆向きに長方形の周上を 1 秒ごとに 1cm 進み, 次の点に移動していくものとする。例えば, 出発してから 10 秒後の点 P, Q の座標はそれぞれ, 点 $(-3,0),(-3,3)$ である。

図 1



(1)　移動を開始してから再び, 点 P が点 A の位置に, 点 Q が点 B の位置に初めて同時に到達するのは何秒後か。

この (1) に対しては, 点 P は長方形の周上を 20 秒で点 Q は 28 秒で 1 周するから, 20 と 28 の最小公倍数を求めて, 140 秒後となる。ここで「整数の性質」を使っている。

そこで 140 秒間の 3 点 A, P, Q の座標について, どのような規則性があるか考察する。ただし, 時刻は整数秒とする。

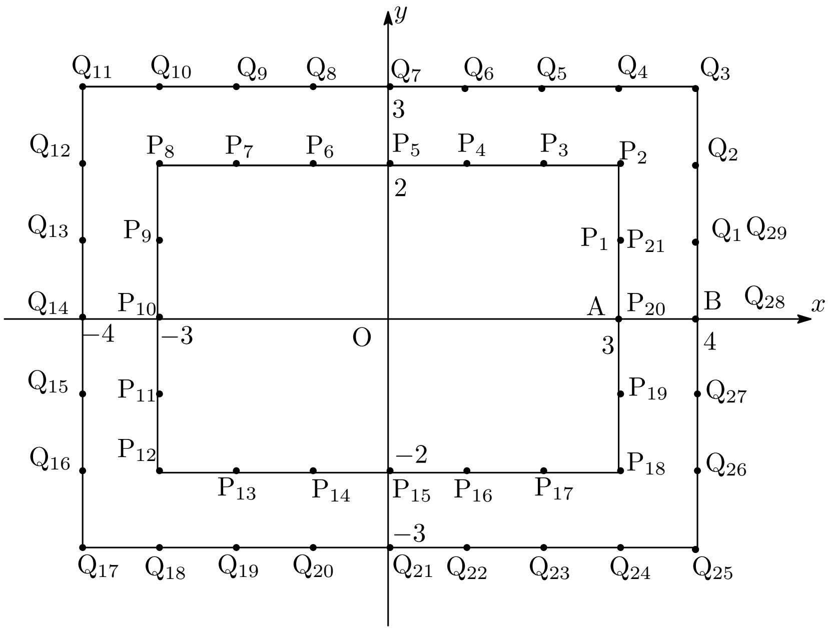
点 P は出発してから 140 秒間に 7 周する。そこで, 点 P が点 $(-3,0)$ へ到達する回数と点 Q の位置情報の数値を示したものが, 次の表 1 である。

表 1

点 $(-3,0)$ への到達回数と到達時間	点 Q の移動距離	点 B から点 Q の移動距離	点 Q の座標
1 回目　10 秒	$10\,\mathrm{cm}$	$10\,\mathrm{cm}$	$(-3,3)$
2 回目　30 秒	$30=28+2\,\mathrm{cm}$	$2\,\mathrm{cm}$	$(4,2)$
3 回目　50 秒	$50=28+22\,\mathrm{cm}$	$22\,\mathrm{cm}$	$(1,-3)$
4 回目　70 秒	$70=28\times2+14\,\mathrm{cm}$	$14\,\mathrm{cm}$	$(-4,0)$
5 回目　90 秒	$90=28\times3+6\,\mathrm{cm}$	$6\,\mathrm{cm}$	$(1,3)$
6 回目　110 秒	$110=28\times3+26\,\mathrm{cm}$	$26\,\mathrm{cm}$	$(4,-2)$
7 回目　130 秒	$130=28\times4+18\,\mathrm{cm}$	$18\,\mathrm{cm}$	$(-3,-3)$

そこで，t 秒後にある点 P，Q の位置をそれぞれ P_t，Q_t と表す。例えば，点 P は点 $(-3,0)$ に 10，30，50，70，90，110，130 秒後に到達するので $\mathrm{P}_{10},\mathrm{P}_{30},\mathrm{P}_{50},\mathrm{P}_{70},\mathrm{P}_{90},\mathrm{P}_{110},\mathrm{P}_{130}$ と表す。点 P, Q の位置を考えると，図 2 のようになる。

図 2



点 P, Q の位置は，

(i) 点 P が $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_5,\mathrm{P}_9,\mathrm{P}_{13},\mathrm{P}_{17}$ のとき，点 Q が $\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_5,\mathrm{Q}_9,\mathrm{Q}_{13},\mathrm{Q}_{17},\mathrm{Q}_{21},\mathrm{Q}_{25}$ の各点にそれぞれ対応するから，$5\times7=35$　(通り)

(ii) 点 P が $\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_6,\mathrm{P}_{10},\mathrm{P}_{14},\mathrm{P}_{18}$ のとき，点 Q が $\mathrm{Q}_2,\mathrm{Q}_6,\mathrm{Q}_{10},\mathrm{Q}_{14},\mathrm{Q}_{18},\mathrm{Q}_{22},\mathrm{Q}_{26}$ の各点にそれぞれ対応するから，$5\times7=35$　(通り)

(iii) 点 P が $\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_7,\mathrm{P}_{11},\mathrm{P}_{15},\mathrm{P}_{19}$ のとき，点 Q が $\mathrm{Q}_3,\mathrm{Q}_7,\mathrm{Q}_{11},\mathrm{Q}_{15},\mathrm{Q}_{19},\mathrm{Q}_{23},\mathrm{Q}_{27}$ の各点にそれぞれ対応するから，$5\times7=35$　(通り)

(iv) 点 P が $\mathrm{P}_4,\mathrm{P}_8,\mathrm{P}_{12},\mathrm{P}_{16},\mathrm{P}_{20}$ のとき，点 Q が $\mathrm{Q}_4,\mathrm{Q}_8,\mathrm{Q}_{12},\mathrm{Q}_{16},\mathrm{Q}_{20},\mathrm{Q}_{24},\mathrm{Q}_{28}$ の各

点にそれぞれ対応するから, $5 \times 7 = 35$ (通り)

である。$t = 141$ のとき, 点 P, Q の位置は $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1$ となるため, (i) に帰着される。よって, 整数秒のときの 2 点 P, Q の位置関係は, 全部で 140 通りになる。

(2) (1) で求めた時間内において, 3 点 A, P, Q を頂点とする三角形ができない場合はいくつあるか。ただし, 時刻は整数秒とする。

この (2) に対しては, 3 点 A, P, Q が一直線上にある場合について, 図 2 を使って求めると, $[A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_{20}], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_{12}], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_4], [A, \mathrm{P}_6, \mathrm{Q}_{10}], [A, \mathrm{P}_{10}, \mathrm{Q}_{14}], [A, \mathrm{P}_{14}, \mathrm{Q}_{18}], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_{24}], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_{16}], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_8], [A, \mathrm{P}_{20}, \mathrm{Q}_{28}]$ の 10 通りであり, 動き始めてからの時刻で表すと, それぞれ, 20 秒後, 40 秒後, 60 秒後, 66 秒後, 70 秒後, 74 秒後, 80 秒後, 100 秒後, 120 秒後, 140 秒後である。

(1) では点 P, Q は整数秒の時刻で考えたが, 以後, 時刻を実数秒, 点 P, Q の移動を毎秒 1cm の速さで調べる。出発してから x 秒後の $\triangle \mathrm{APQ}$ の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とすると, 表 2 は $x = 32$ までの関数式を表したものである。

表 2

区間	関数式	区間	関数式
$[0, 2]$	$y = \frac{1}{2}x$	$[18, 20]$	$y = \frac{1}{2}(x-22)^2 - 2$
$[2, 3]$	$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$	$[20, 22]$	$y = -\frac{1}{2}(x-22)^2 + 2$
$[3, 8]$	$y = \frac{1}{2}x + 1$	$[22, 25]$	$y = \frac{1}{2}x - 9$
$[8, 11]$	$y = \frac{1}{2}(x-7)^2 + \frac{9}{2}$	$[25, 25+\sqrt{7}]$	$y = -\frac{1}{2}(x-25)^2 + \frac{7}{2}$
$[11, 12]$	$y = \frac{1}{2}x + 7$	$[25+\sqrt{7}, 28]$	$y = \frac{1}{2}(x-25)^2 - \frac{7}{2}$
$[12, 17]$	$y = \frac{1}{2}(x-16)^2 + 5$	$[28, 31]$	$y = \frac{5}{2}x - 69$
$[17, 18]$	$y = \frac{1}{2}x - 3$	$[31, 32]$	$y = \frac{1}{2}(x-31)^2 + \frac{17}{2}$

時刻が実数秒の場合, 区間 [25, 28] に三角形ができない時刻があり, この時刻を図 3 により調べた。表 2 において, 区間ごとに関数式は異なるが, 1 次関数または 2 次関数で示されている。

区間 [25, 28] において $t = x - 25$ とおくと, $AB = 1$, $BQ = 3 - t$ だから $(3+t) : 2 = 1 : (3-t)$ より

$$(3+t)(3-t) = 2$$

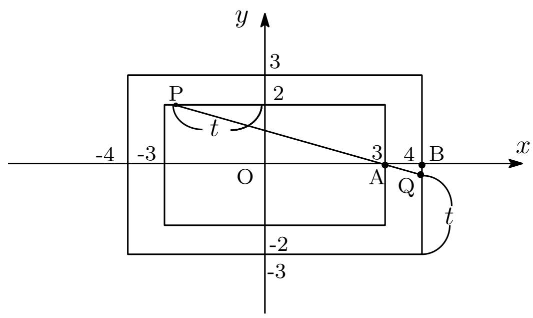
$$t^2 = 7$$

$t > 0$ より, $t = \sqrt{7}$

よって, 時刻 $x = 25 + \sqrt{7}$ (秒後)

ここで,「図形の性質」を使っている。

図 3



この題材の (1) は「整数の性質」の問題を「場合の数と確率」を用いて考えており, (2) は, 実数秒における三角形のできない場合を「図形の性質」を用いて考察した。