和の記号 $\sum$ について

東金高等学校　細田　明良

教科書で和の記号 $\sum$ について，$\sum_{k=1}^{n} k^3$，$\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k$，$\sum_{k=1}^{n} c$ (c は定数) が公式として記載されています。あるとき，生徒から「$\sum_{k=1}^{n} k^4$ はどのようになるのですか。」という質問を受けました。生徒には，教科書と同様に，恒等式 $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ を利用して導き出せることを伝えました。そして，質問した生徒に以下の解答を示しました。

1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ の公式をつくる

問題 1

恒等式 $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。

(解答)

$k = 1$ のとき　$2^5 - 1^5 = 5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1$

$k = 2$ のとき　$3^5 - 2^5 = 5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1$

$\vdots$

$k = n$ のとき　$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

これら n 個の等式の辺々を加えると

$$(n+1)^5 - 1^5 = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + n$$

であるから

$$\begin{aligned}
5\sum_{k=1}^{n} k^4 &= (n+1)^5 - 1^5 - 10\sum_{k=1}^{n} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k - n \\
&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - 10 \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
&\qquad - 10 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\
&= \frac{1}{6}n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

(解答終)

2　$\sum$ の公式を考察する

$\sum_{k=1}^{n} k^4$ の公式は，覚えるのも導き出すのも骨が折れます。そこで，参考文献 [1] にある等式を証明し，その等式を使って $\sum$ に関する問題を考察してみます。

問題 2

$$a_k = k(k+1)\cdots(k+m-1) \iff S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

を証明せよ。ただし，$m \geqq 1$ とする。

(証明)

(I) ($\Rightarrow$)

まず，$a_k = k(k+1)\cdots(k+m-1)$ ならば，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1} \cdots (*)$

となることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$(*)$ の (左辺)$= S_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = 1 \times 2 \times \cdots \times m$

$(*)$ の (右辺)$= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (1+m)}{m+1} = 1 \times 2 \times \cdots \times m$

よって，(左辺)=(右辺) となり $(*)$ は成り立つ。

(ii)　$n = l$ のとき

$S_l = \sum_{k=1}^{l} a_k = \frac{l(l+1)\cdots(l+m)}{m+1}$ が成り立つと仮定すると，$n = l+1$ のとき

$$S_{l+1} = S_l + a_{l+1} = \frac{l(l+1)\cdots(l+m)}{m+1} + (l+1)(l+2)\cdots(l+m) = \frac{(l+1)\cdots(l+m)(l+m+1)}{m+1}$$

よって，$n = l+1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

(i)，(ii) より (I) は成り立つ。

(II) ($\Leftarrow$)

逆に，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$ ならば，$a_k = k(k+1)\cdots(k+m-1)$ となることを示す。

(iii) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1} - \frac{(n-1)n\cdots(n+m-1)}{m+1} \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m+1}\{(n+m)-(n-1)\} \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m+1}(m+1) \\ &= n(n+1)\cdots(n+m-1) \end{aligned}$$

となり成り立つ。

(iv) $n = 1$ のとき

$S_1 = \dfrac{1 \times 2 \times \cdots \times m \times (m+1)}{m+1} = 1 \times 2 \times \cdots \times m$

$a_1 = 1 \times 2 \times \cdots \times m$

であるから $a_1 = S_1$ となり成り立つ。

よって，(iii)，(iv) より (II) は成り立つ。

(証明終)

3 $\sum$ の問題

次の問題 3 を，問題 1 の公式を使うのではなく，より使いやすい問題 2 の公式を使って解いてみます。

問題 3

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^4 + 4k^3 + 3k^2 + 2k + 1)$ を求めよ。

(解答)　(最後の答えは n でくくらず，$n(n+1)$ でくくり出してあります。)

$$\begin{aligned} &5k^4 + 4k^3 + 3k^2 + 2k + 1 \\ &= 5k(k+1)(k+2)(k+3) - 26k^3 - 52k^2 - 28k + 1 \\ &= 5k(k+1)(k+2)(k+3) - 26k(k+1)(k+2) + 26k^2 + 24k + 1 \\ &= 5k(k+1)(k+2)(k+3) - 26k(k+1)(k+2) + 26k(k+1) - 2k + 1 \end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(5k^4+4k^3+3k^2+2k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n}5k(k+1)(k+2)(k+3)-\sum_{k=1}^{n}26k(k+1)(k+2)+\sum_{k=1}^{n}26k(k+1)+\sum_{k=1}^{n}(-2k+1)\\
&=5\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-26\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\\
&\qquad\qquad+26\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-39(n+2)(n+3)+52(n+2)-6\}+n\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(6n^3+15n^2+13n+8)+n
\end{aligned}
$$

(解答終)

また，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^4$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k$ の公式を使って，結果が一致することを確認します。

問題 4

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^4+4k^3+3k^2+2k+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(6n^3+15n^2+13n+8)+n$ を確かめよ。

(解答)　(最後の答えは n でくくらず，$n(n+1)$ でくくり出してあります。)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(5k^4+4k^3+3k^2+2k+1)\\
&=5\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)+4\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\\
&\qquad\qquad+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(6n^3+9n^2+n-1)+6n(n+1)+3(2n+1)+6\}+n\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(6n^3+15n^2+13n+8)+n
\end{aligned}
$$

(解答終)

参考文献

[1] 青木和彦,「現代数学への入門・微分と積分 1」, pp7 問 12(1), 岩波書店, 1995 年