正多面体の方程式について

県立松戸高等学校　　新堀 弘騏

0　前書き

正多面体が正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体の 5 種類しかないことは，古くから知られていた。

然しながら，それらを表す方程式は，現代に至るまで知られていない。

対象は極めて明瞭であるが，方程式に結びつけるような手掛かりとなる第一着手に誰も気づかなかった故である。

この小論は，その打破を目的とする。

(昨年の $\alpha-\omega$ 53 号で「正多角形の方程式について」執筆した。更に発展させて，今回「正多面体の方程式について」考察したいと思う。)

1　序論

1–1　対称化法

x, y, z についての方程式において，着目する文字をそれに絶対値をつけたもので置き換えることをその文字方向の対称化とよぶ。

例えば，$f(x, y, z) = 0$ において，x を $|x|$ で置き換えて，$f(|x|, y, z) = 0$ にすることを x 方向の対称化とよぶのである。

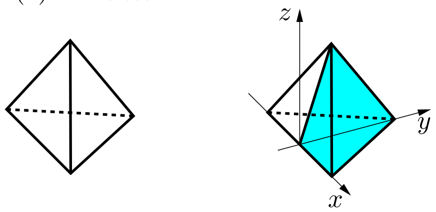
3 次元の座標空間において描かれる，$f(x, y, z) = 0$ を満たす点全体の集合としての図形の $x \geqq 0$ の領域にある部分が，平面 $x = 0$ に関して，$x \leqq 0$ の領域に対称化され，全体として，平面 $x = 0$ に関して対称な図形が形成されるのである。

1–2　正多面体の対称性の利用法

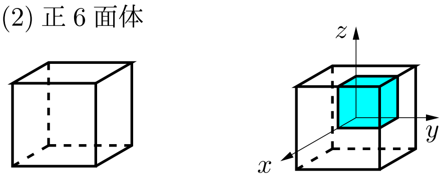
正 4 面体以外の正多面体は，いずれも，その中心を座標空間内の原点に一致させて，下の図のように，適当な配置をすると，yz 平面，zx 平面，xy 平面に関して面対称となる。

$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ の領域にある図形と，この領域内で合同である図形の方程式さえわかれば，対称化法によって，全体の図形を表す方程式を見つけることができるということである。

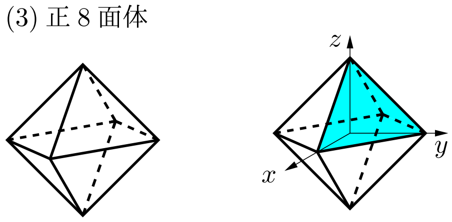
(1) 正 4 面体



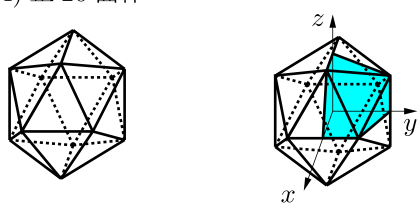
(2) 正 6 面体



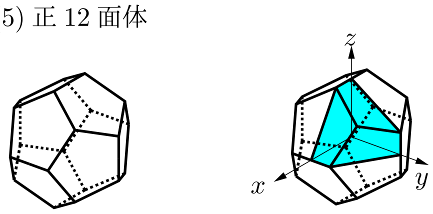
(3) 正 8 面体



(4) 正 20 面体



(5) 正 12 面体



2　本論

2–1　正 4 面体の方程式

xy 平面上で，単位円周上の 3 点 $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を頂点とする正 3 角形は [*1]

$$\left|3x+\sqrt{3}|y|\right|+\sqrt{3}|y|-x=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せる。

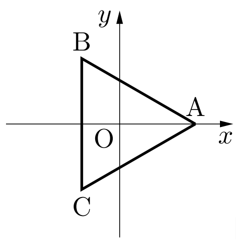


図 1

[*1] 昨年の「$\alpha - \omega$ 53 号」P.66「正多角形の方程式について」より

z 軸を加えて，3 次元のユークリッド座標空間とし，この中に原点 O を頂点として，z 軸の正の方向に無限に続く正 3 角錐を作る。その際，$z=\sqrt{2}$ なる切断面に，① と合同な正 3 角形が現れるようにすると，底面のない正 3 角錐の方程式は，次の形となる。

$$\Big|3x+\sqrt{3}|y|\Big|+\sqrt{3}|y|-x=\sqrt{2}z \qquad \cdots\cdots\ ②$$

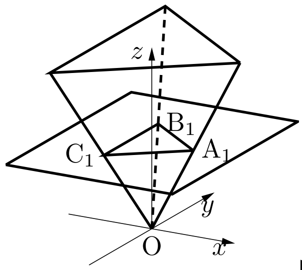


図 2

図 2 において，$\mathrm{A}_1(1,0,\sqrt{2}),\mathrm{B}_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right),\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right)$ である。

この正 3 角錐 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ を y 軸のまわりに θ だけ回転させ，$\triangle\mathrm{OB_1C_1}$ が xy 平面上にくるようにしたい。このことは，線分 $\mathrm{B_1C_1}$ の中点 $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2},0,\sqrt{2}\right)$ と x 軸方向のベクトル $(-1,0,0)$ から，すぐ求めることができて，$\cos\theta=\frac{1}{3}$ を満たさなければならないことがわかる。この θ 回転の結果，方程式 ② は

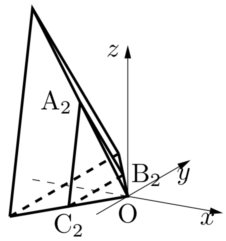


図 3

$$\left|3\left(\frac{x+2\sqrt{2}z}{3}\right)+\sqrt{3}|y|\right|+\sqrt{3}|y|-\frac{x+2\sqrt{2}z}{3}=\sqrt{2}\left(\frac{-2\sqrt{2}x+z}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

つまり，

$$\Big|x+2\sqrt{2}z+\sqrt{3}|y|\Big|+\sqrt{3}|y|+x-\sqrt{2}z=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

となる。

次に，原点 O を中心として，z 軸のまわりに $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転して，半直線 $\mathrm{OC_2}$ が x 軸に重なるようにすると，

$$\left|\left(x\cos\frac{\pi}{6}-y\sin\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{2}z+\sqrt{3}\left|x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}\right|\right|$$
$$+\sqrt{3}\left|x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}\right|+\left(x\cos\frac{\pi}{6}-y\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}z=0$$
$$\cdots\cdots\ ⑤$$

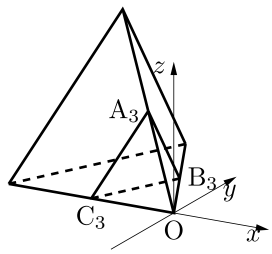


図 4

つまり，

$$\left|\frac{\sqrt{3}x-y}{2}+2\sqrt{2}z+\sqrt{3}\left|\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right|\right|+\sqrt{3}\left|\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right|+\frac{\sqrt{3}x-y}{2}-\sqrt{2}z=0 \qquad \cdots\cdots\ ⑥$$

となる。もっと簡潔にして，

$$\Big|\sqrt{3}x-y+4\sqrt{2}z+\sqrt{3}|x+\sqrt{3}y|\Big|+\sqrt{3}|x+\sqrt{3}y|+\sqrt{3}x-y-2\sqrt{2}z=0 \qquad \cdots\cdots\ ⑦$$

として，x 軸に沿って，適当に平行移動して，yz 平面で切ると，$x\geqq 0$ の領域の図形は正 4 面体を真っ二つにしたものになっている。

ここでは，1 辺が 1 の正 4 面体の方程式を求めたいので，x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動して，x 方向に対称化すると，

$$\left|\sqrt{3}\Big(|x|-\frac{1}{2}\Big)-y+4\sqrt{2}z+\sqrt{3}\left|\Big(|x|-\frac{1}{2}\Big)+\sqrt{3}y\right|\right| +\sqrt{3}\left|\Big(|x|-\frac{1}{2}\Big)+\sqrt{3}y\right|+\sqrt{3}\Big(|x|-\frac{1}{2}\Big)-y-2\sqrt{2}z=0 \quad \cdots\cdots \text{⑧}$$

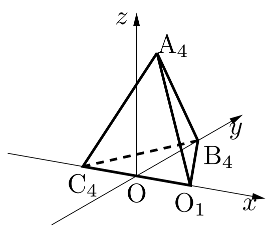


図 5

つまり，

$$\left|\sqrt{3}|x|-\frac{\sqrt{3}}{2}-y+4\sqrt{2}z+\sqrt{3}\left||x|-\frac{1}{2}+\sqrt{3}y\right|\right|+\sqrt{3}\left||x|-\frac{1}{2}+\sqrt{3}y\right|+\sqrt{3}|x|-\frac{\sqrt{3}}{2}-y-2\sqrt{2}z=0 \quad \cdots\cdots \text{⑨}$$

よって，

$$\left|\sqrt{3}|x|-y+4\sqrt{2}z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left||x|+\sqrt{3}y-\frac{1}{2}\right|\right|+\sqrt{3}\left||x|+\sqrt{3}y-\frac{1}{2}\right|+\sqrt{3}|x|-y-2\sqrt{2}z=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots \text{⑩}$$

が得られた。

中心を原点 O に合致させたければ，y 軸，z 軸方向にそれぞれ $-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12}$ だけ平行移動させればよい。すると，

$$\left|\sqrt{3}|x|-\Big(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big)+4\sqrt{2}\Big(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left||x| +\sqrt{3}\Big(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big)-\frac{1}{2}\right|\right|+\sqrt{3}\left||x|+\sqrt{3}\Big(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big)-\frac{1}{2}\right| +\sqrt{3}|x|-\Big(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big)-2\sqrt{2}\Big(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots \text{⑪}$$

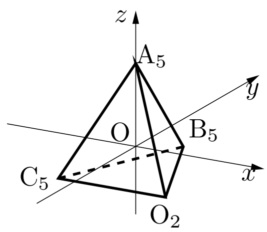


図 6

から，最終的に，正 4 面体の方程式として，

$$\left|\sqrt{3}|x|-y+4\sqrt{2}z+\sqrt{3}\left||x|+\sqrt{3}y\right|\right|+\sqrt{3}\left||x|+\sqrt{3}y\right|+\sqrt{3}|x|-y-2\sqrt{2}z=\sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{⑫}$$

が得られる。

2–2　正 6 面体の方程式

正 6 面体の任意の頂点を共有し，直交する 3 平面を表すために，3 点 $\mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ から z 軸上の点 P を $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = \frac{\pi}{2}$ を満たすようにするためには，$\mathrm{P}\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とし，正 3 角錐 PABC の方程式を求めなければならない。それは

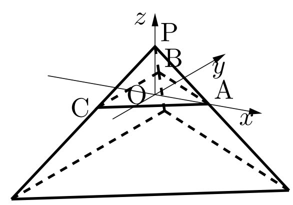


図 1

$$\left|3x + \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| - x = -2\sqrt{2}\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。

これを，まず，y 軸のまわりに θ だけ回転して，辺 PA が xy 平面に垂直になるようにしたい。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と z 軸方向のベクトルから，θ は $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たすことがわかるので，① は θ 回転をほどこすと，

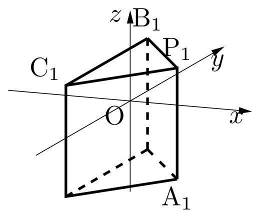


図 2

$$\left|3\left(\frac{x - \sqrt{2}z}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| - \left(\frac{x - \sqrt{2}z}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}x + z}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

つまり，

$$\left|\sqrt{3}x - \sqrt{6}z + \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| + \sqrt{3}x + \sqrt{6}z = 2 \qquad \cdots\cdots ③$$

となる。

これを，さらに z 軸のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して，頂点 P_1 を $x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ の領域内に移し，その領域内で，P_2 を頂点として，立方体になるようにする。

すると，その方程式は

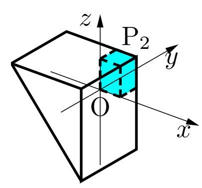


図 3

$$\left|\sqrt{3}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{6}z + \sqrt{3}\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right|\right| + \sqrt{3}\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right| + \sqrt{3}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{6}z = 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

つまり，

$$\left|x + y - 2z + |-x+y|\right| + |-x+y| + x + y + 2z = \frac{2}{3}\sqrt{6} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる。

⑤ は x, y, z 方向の対称化を行うと，1 辺の長さが $\frac{\sqrt{6}}{3}$ の正 6 面体の方程式となってしまうので，相似変換して，1 辺の長さを 1 にすると，最終的に

$$\left||x|+|y|-2|z|+\left|-|x|+|y|\right|\right|+\left|-|x|+|y|\right|+|x|+|y|+2|z|=2 \quad \cdots\cdots ⑥$$

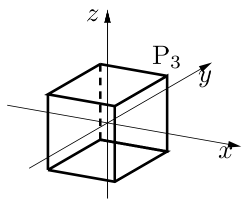


図 4

が得られる。

2–3　正 8 面体の方程式

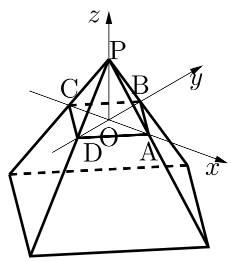


図 1

xy 平面上の 4 点 A$(1, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(-1, 0, 0)$, D$(0, -1, 0)$ を頂点とする正方形をもとにして，z 軸上の点 P を頂点とする正 4 角錐を作れば，その方程式は

$$|x|+|y|=1-z \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。

① における $z \geqq 0$ の領域における正 4 角錐 PABCD は，1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正 8 面体の上半分と合同であるから，① を z 方向に対称化すると，正 8 面体の方程式が即，得られる。

$$|x|+|y|=1-|z| \quad \cdots\cdots ②$$

つまり，

$$|x|+|y|+|z|=1 \quad \cdots\cdots ③$$

③ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ なので，相似変換すると，

$$|x|+|y|+|z|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ④$$

となる。

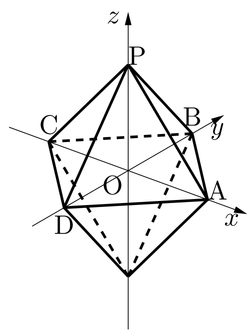


図 2

2–4　正 20 面体の方程式

まず，xy 平面上の単位円の周上の 5 点
$A(-1,0), B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right), C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right),$
$D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right), E\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$
を頂点にもつ正 5 角形 ABCDE を用意する。

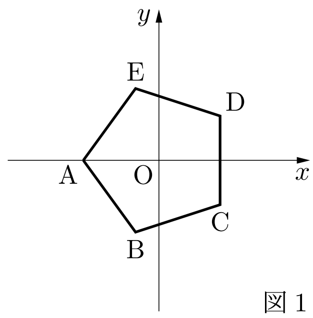


図 1

$$\left|-x\sin\frac{2\pi}{5}-|y|\cos\frac{2\pi}{5}\right|+\left|-x\sin\frac{4\pi}{5}-|y|\cos\frac{4\pi}{5}\right|$$
$$+\frac{1}{2}|y|+\frac{1}{2}x\cot\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}-\frac{1}{2}\cot\frac{2\pi}{5}$$
$$\cdots\cdots \text{①}$$

次に，z 軸上に点 P をとって，正 5 角錐 PABCDE を作る。$\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCD, $\triangle$PDE, $\triangle$PEA が正 3 角形であることから，頂点 P の座標がわかる。

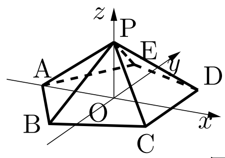


図 2

$$\left(0, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

求める正 20 面体の中心が原点 O に合致するように，正 5 角錐 PABCDE を z 軸の正の向きに平行移動しよう。このとき，各頂点の移動先は，P_1, A_1, B_1 等と表す。

$OP_1=OA_1, P_1A_1=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ などの条件から，頂点 P_1 の座標は

$$\left(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

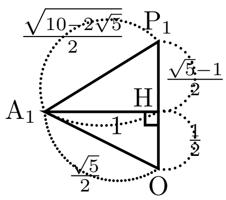


図 3

となる。$\triangle OA_1P_1$ の形状 (右図 3) から，$\angle A_1OP_1=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

であるから，A_1 から，OP_1 に下した垂線の足を H とすると，

$$OH=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

である。

以上のことから，頂点 P_1 の下方に無限にひろがる正 5 角錐 $P_1A_1B_1C_1D_1E_1$ の方程式は

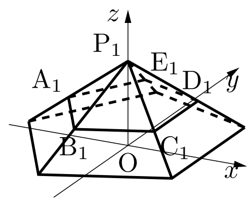


図 4

$$\left|-x\sin\frac{2\pi}{5}-|y|\cos\frac{2\pi}{5}\right|+\left|-x\sin\frac{4\pi}{5}-|y|\cos\frac{4\pi}{5}\right|+\frac{1}{2}|y|$$
$$+\frac{1}{2}x\cot\frac{2\pi}{5}=\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}-\frac{1}{2}\cot\frac{2\pi}{5}\right)\left(1-\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$
$$\cdots\cdots \text{⑥}$$

この正５角錐 $\mathrm{P_1A_1B_1C_1D_1E_1}$ の１辺をなす半直線 $\mathrm{P_1A_1}$ が x 軸と平行になるように，y 軸のまわりに回転する。$\angle \mathrm{P_1OA_1} = \alpha$ とすると，回転角は $\frac{\alpha}{2}$ であり，$\mathrm{A_1}(-1, 0, \frac{1}{2})$, $\mathrm{P_1}(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2})$ から α は

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

を満たすことがわかる。

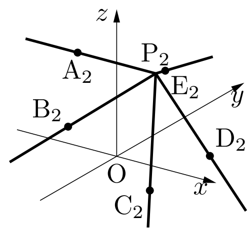


図 5

正５角錐 $\mathrm{P_2A_2B_2C_2D_2E_2}$ の方程式は

$$\begin{aligned}
&\left|-\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - z\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{5} - |y|\cos\frac{2\pi}{5}\right| + \left|-\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - z\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{4\pi}{5} - |y|\cos\frac{4\pi}{5}\right| \\
&+\frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - z\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cot\frac{2\pi}{5} \\
&= \left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \frac{1}{2}\cot\frac{2\pi}{5}\right)\left(1 - \frac{(x\sin\frac{\alpha}{2} + z\cos\frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \qquad \cdots\cdots ⑧
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \\
&\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨
\end{aligned}$$

を ⑧ に代入して，簡単にしてみると，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}x + \frac{\sqrt{5}-1}{4}|y| - \frac{1}{2}z\right| + \left|\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{4}|y| - \frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right| + \frac{5-\sqrt{5}}{20}x + \frac{1}{2}|y| - \frac{3\sqrt{5}-5}{20}z \\
&\quad = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}x + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}z - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩
\end{aligned}$$

となる。右辺は

$$\frac{2+\sqrt{5}}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}x - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}z \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

となるので，x, z の項を左辺に移項して整理すると，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}x + \frac{\sqrt{5}-1}{4}|y| - \frac{1}{2}z\right| + \left|\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{4}|y| - \frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right| + \frac{3+\sqrt{5}}{4}x + \frac{1}{2}|y| + \frac{5+\sqrt{5}}{4}z \\
&= \frac{2+\sqrt{5}}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑫
\end{aligned}$$

となる。

⑫ は，x 方向の対称化を行うと

$$\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}|x|+\frac{\sqrt{5}-1}{4}|y|-\frac{1}{2}z\right|+\left|\frac{1}{2}|x|-\frac{\sqrt{5}+1}{4}|y|\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right|+\frac{3+\sqrt{5}}{4}|x|+\frac{1}{2}|y|+\frac{5+\sqrt{5}}{4}z$$
$$=\frac{2+\sqrt{5}}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \cdots\cdots\cdots ⑬$$

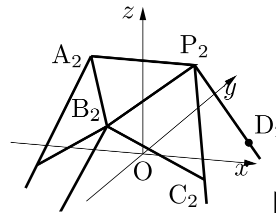


図 6

となる。

さらに，$\mathrm{OP_2}$ を軸として，辺 $\mathrm{P_2B_2}$ が辺 $\mathrm{P_2A_2}$ の位置，すなわち，x 軸と平行になる位置にくるまで回転させたい。このときの回転角を $-\beta$ としよう。($\beta=\frac{2\pi}{5}$ とすればよいことはすぐわかる。)

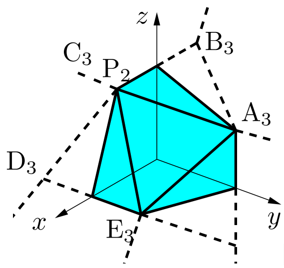


図 7

さて，3 次元空間内における回転移動に対して，ハミルトンの四元数を用いる。x,y,z 軸の正の向きの単位ベクトルをそれぞれ i,j,k とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ と同じ向きの単位ベクトルを e とすれば，

$$e=i\sin\frac{\alpha}{2}+k\cos\frac{\alpha}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ⑭$$

なので，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=a, \cos\frac{\alpha}{2}=b \quad \cdots\cdots\cdots ⑮$$

とおけば，任意のベクトル $xi+yj+zk$ の変換式は

$$\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}e\right)(xi+yj+zk)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}e\right)$$
$$=i\left\{x\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+(a^2-b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)-y(b\sin\beta)+z\left(2ab\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right\}$$
$$+j\left\{x(b\sin\beta)+y\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-(a^2+b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)-z(a\sin\beta)\right\}$$
$$+k\left\{x\left(2ab\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+y(a\sin\beta)+z\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-(a^2-b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑯$$

ここで，$a^2-b^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\alpha, a^2+b^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$ であるから，⑯ は

$$=i\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}y+\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right)+j\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}y-\frac{1}{2}z\right)+k\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{5}+1}{4}z\right) \quad \cdots\cdots\cdots ⑰$$

となる。

式 ⑰ における各成分をなす x,y,z に関する 1 次式を ⑬ 式の x,y,z にそれぞれ代入すると，最終的な対称化の前の正 20 面体を構成する，$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ の領域内にある面の被覆面の

方程式が得られる。

$$\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left|\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}y+\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right|+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}y-\frac{1}{2}z\right|\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{5}+1}{4}z\right)\right|+\left|\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}y+\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right|\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}y-\frac{1}{2}z\right|-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{5}+1}{4}z\right)\right|$$
$$+\frac{3+\sqrt{5}}{4}\left|\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}y+\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{5}+1}{4}x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}y-\frac{1}{2}z\right|$$
$$+\frac{5+\sqrt{5}}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{5}+1}{4}z\right)=\frac{2+\sqrt{5}}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑱}$$

最後に，x, y, z 方向の対称化を行い，係数をもっと簡潔にすると，正 20 面体の方程式

$$\left|\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}|x|-\frac{3+\sqrt{5}}{2}|y|+|z|\right|+\left||x|+\frac{3-\sqrt{5}}{2}|y|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|z|\right|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|x|-|y|-\frac{\sqrt{5}+1}{2}|z|\right|$$
$$+\left|\left||x|-\frac{\sqrt{5}+1}{2}|y|+\frac{\sqrt{5}-1}{2}|z|\right|-\left|\frac{3+\sqrt{5}}{2}|x|+|y|-\frac{\sqrt{5}+1}{2}|z|\right|-\frac{3-\sqrt{5}}{2}|x|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|y|-|z|\right|$$
$$+\left|\frac{3+\sqrt{5}}{2}|x|-(2+\sqrt{5})|y|+\frac{\sqrt{5}+1}{2}|z|\right|+\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}|x|+\frac{\sqrt{5}-1}{2}|y|-|z|\right|+\sqrt{5}|x|+\frac{5+\sqrt{5}}{2}|y|$$
$$+\frac{5+3\sqrt{5}}{2}|z|=5+3\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑲}$$

が得られる。

2–5　正 12 面体の方程式

正 12 面体の各頂点には，3 つの合同な正 5 角形の頂点が集まっており，局所的に正 3 角錐が形成されている。

そこで，xy 平面上の単位円の周上に頂点をもつ正 3 角形 ABC を出発点とし，z 軸上に，点 P をとって，

$$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{CPA}=\frac{3\pi}{5} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

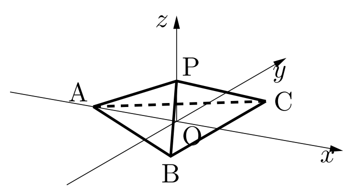


図 1

を満たすようにしたい。頂点 P の座標は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3}, \cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

などから，

$$\mathrm{AP}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}, \mathrm{P}=\left(0,0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

にとればよいことがわかる。

求める正 12 面体の中心を原点 O に重ねるために，正 3 角錐 PABC を z 軸の正の方向に平行移動して，$\mathrm{OP_1} = \mathrm{OA_1}$ を満たすようにする。結果として，$\mathrm{P_1}, \mathrm{A_1}$ は

$$\mathrm{P_1}(0, 0, \frac{3}{2}), \mathrm{A_1}\left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdot \ ④$$

となる。

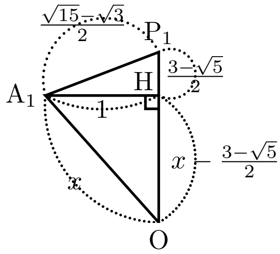


図 2

点 $\mathrm{P_1}$ を頂点として，z 軸の下方に無限にひろがる正 3 角錐の方程式は

$$\left|3x - \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| + x = p - qz \qquad \cdots\cdots\cdot \ ⑤$$

とおける。

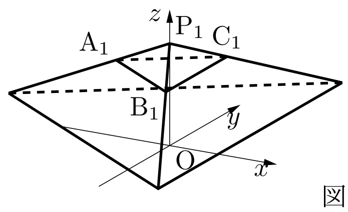


図 3

これが，点 $\mathrm{P_1}, \mathrm{A_1}$ を通ることから，p, q は

$$p = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}, q = 3 + \sqrt{5} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑥$$

したがって，⑤ は

$$\left|3x - \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| + x = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} - (3 + \sqrt{5})z \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑦$$

となる。

これを半直線 $\mathrm{P_1A_1}$ が x 軸と平行になるように，y 軸のまわりに回転する。そのときの回転角は $\angle \mathrm{A_1OP_1} = \alpha$ とすると，$\frac{\alpha}{2}$ とすればよい。

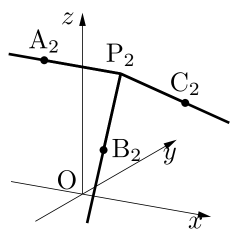


図 4

$$\left|3\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - z\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{3}|y|\right| + \sqrt{3}|y| + x\cos\frac{\alpha}{2} - z\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$= \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} - (3 + \sqrt{5})\left(x\sin\frac{\alpha}{2} + z\cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \cdots\cdots \ ⑧$$

となる。

図 2 から

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑨$$

なので，

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}, \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑩$$

を ⑧ に代入し，文字のある項は左辺に移項してまとめると，

$$\left|\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}|y| - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}z\right| + \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}|y| + \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{2}z = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑪$$

もっと簡潔にして

$$\left|(\sqrt{5}+1)x-2|y|-(\sqrt{5}-1)z\right|+(\sqrt{5}+1)x+2|y|+(\sqrt{5}+3)z=3\sqrt{3}+\sqrt{15} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

そこで，x 方向の対称化を行うと

$$\left|(\sqrt{5}+1)|x|-2|y|-(\sqrt{5}-1)z\right|+(\sqrt{5}+1)|x|$$
$$+2|y|+(\sqrt{5}+3)z=3\sqrt{3}+\sqrt{15} \qquad \cdots\cdots ⑬$$

となる。

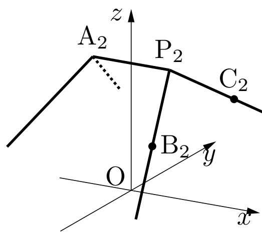


図 5

最後に，直線 OP_2 を軸として回転させて，線分 P_2B_2 が線分 P_2A_2 に重なる位置まで移動させる。このときの回転角は $\angle A_2P_2B_2=\beta$ とすると，$-\beta$ と表せる。$(\beta=\frac{2\pi}{3})$

回転は四元数を用いる。

ここからの議論は 2-4 の正 20 面体の場合と同様であって，ただ，α,β の値が先の場合と異なるだけである。

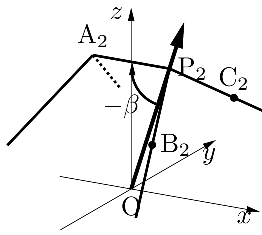


図 6

基本ベクトルを i,j,k，$\overrightarrow{OP_2}$ と同じ向きの単位ベクトルを

$$e=ai+bk, a=\sin\frac{\alpha}{2}, b=\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cdots\cdots ⑭$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}e\right)(xi+yj+zk)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}e\right)\\
&=i\left\{x\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+(a^2-b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)-by\sin\beta+2abz\sin^2\frac{\beta}{2}\right\}\\
&\quad+j\left\{bx\sin\beta+y\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-(a^2+b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)-az\sin\beta\right\}\\
&\quad+k\left\{2ab\sin^2\frac{\beta}{2}+ay\sin\beta+z\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-(a^2-b^2)\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots ⑮\\
&=i\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}y+\frac{1}{2}z\right)\\
&\quad+j\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{5}-1}{4}z\right)\\
&\quad+k\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}y+\frac{\sqrt{5}+1}{4}z\right) \qquad \cdots\cdots ⑯
\end{aligned}$$

となる。

⑯ における各成分を ⑬ に代入すると，正 12 面体の頂点 A_3 のまわりの 3 つの面に接する屋根状の空間図形の方程式となるので，x, y, z 方向の対称化を行うと，

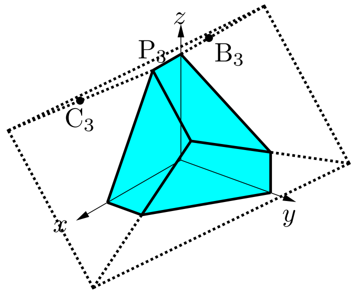


図 7

$$\begin{aligned}&\Bigg|(\sqrt{5}+1)\Big|-\frac{\sqrt{5}-1}{4}|x|-\frac{\sqrt{5}+1}{4}|y|+\frac{1}{2}|z|\Big|-2\Big|\frac{\sqrt{5}+1}{4}|x|-\frac{1}{2}|y|-\frac{\sqrt{5}-1}{4}|z|\Big|\\&-(\sqrt{5}-1)\Big(\frac{1}{2}|x|+\frac{\sqrt{5}-1}{4}|y|+\frac{\sqrt{5}+1}{4}|z|\Big)\Bigg|+(\sqrt{5}+1)\Big|-\frac{\sqrt{5}-1}{4}|x|-\frac{\sqrt{5}+1}{4}|y|+\frac{1}{2}|z|\Big|\\&+2\Big|\frac{\sqrt{5}+1}{4}|x|-\frac{1}{2}|y|-\frac{\sqrt{5}-1}{4}|z|\Big|+(\sqrt{5}+3)\Big(\frac{1}{2}|x|+\frac{\sqrt{5}-1}{4}|y|+\frac{\sqrt{5}+1}{4}|z|\Big)\\&=3\sqrt{3}+\sqrt{15} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰\end{aligned}$$

⑰ を簡潔にするために，1 辺の長さを $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$ から 1 にすると，最終的に次のように正 12 面体の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\Bigg|\Big||x|+\frac{\sqrt{5}+3}{2}|y|-\frac{\sqrt{5}+1}{2}|z|\Big|-\Big|\frac{\sqrt{5}+1}{2}|x|-|y|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|z|\Big|\\&-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|x|-\frac{3-\sqrt{5}}{2}|y|-|z|\Bigg|+\Big|-|x|-\frac{\sqrt{5}+3}{2}|y|+\frac{\sqrt{5}+1}{2}|z|\Big|+\\&\Big|\frac{\sqrt{5}+1}{2}|x|-|y|-\frac{\sqrt{5}-1}{2}|z|\Big|+\frac{\sqrt{5}+3}{2}|x|+\frac{\sqrt{5}+1}{2}|y|+(\sqrt{5}+2)|z|\\&=3+3\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑱\end{aligned}$$