# 過去の入試問題3題についての考察

県立柏高等学校　西川　誠

今回のレポートは, 3 つの入試問題について別解及び簡単な注意事項をまとめたいと思います。

## 1　1 が 99 個並ぶ問題

まず, 2013 年に東京大学・理系で出題された問題をやってみましょう。

問題 1

次の命題 $P$ を証明したい。

命題 $P$ : 次の条件 (a) (b) を共に満たす自然数 $A$ が存在する。

(a) $A$ は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) $A$ を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問に答えよ。

(1) $y$ を自然数とする。このとき, 不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 $x$ の範囲を求めよ。

(2) 命題 $P$ を証明せよ。

(1) はただ不等式を解くだけなのですが, それを (2) でどう利用したらいいのかがなかなかわかりません。$111=3\times 37$ などにすぐ気がつくようだと難しくないのでしょうが, 多くの受験生にとっては難問だったようです。「大学への数学」(東京出版) では, 最難問の D ランクに位置づけされていました。今回のレポートでは, この (1) を使って証明するのではなくて, 別解を紹介したいと思います。しかも, こちらの解法でやれば, ほとんどの問題が同様に解けてしまいます。

アイデアは, 連続する 3 つの自然数の積 $(n-1)n(n+1)=n^3-n$ は, $n$ が十分大きければ, $n^3-n\fallingdotseq n^3$ となるということだけです。後は, 不等式の評価を上手くやれば完成です。

(解答)　まず, $B=111\cdots111\times 10^{6000}$ (1 が先頭から 100 個並ぶ)

$C=111\cdots110\times 10^{6000}$ (1 が先頭から 99 個並ぶ) とおきましょう。

おき方に深い意味はありません。証明の途中で $B$ から引き算をするので, $B$ の方は 1 を 99 個より 1 つ多くして, 100 個並べることにしたのです。$10^{6000}$ は, 3 乗根が取りやすくて, しかも不等式の評価が緩くて済むように 1 が 99 個並ぶ桁数よりも極端に大きく取った訳です。

ここで, $n=[\sqrt[3]{B}]$(ガウス記号) とすれば, $A=n^3-n$ がもう命題 $P$ の (a)(b) を満たす $A$ となってしまいます。つまり,

$$C \;=\; \underset{(1\text{ が先頭に }99\text{ 個並ぶ})}{111\cdots110} \times 10^{6000} < A = n^3 - n < B = \underset{(1\text{ が先頭に }100\text{ 個並ぶ})}{111\cdots111} \times 10^{6000}$$

が成立します。左辺の $C = 111\cdots110\times10^{6000}$ は上 99 桁がすべて 1 である最小の整数で, 右辺の $B = 111\cdots111\times10^{6000}$ は上 100 桁がすべて 1 である最小の整数である。

それでは, 不等式を評価して証明を完成してみましょう。

($A < B$ の証明)

$n = [\sqrt[3]{B}]$ なので, $n \leqq \sqrt[3]{B} < n+1$ から, $n^3 \leqq B < (n+1)^3$ $\cdots$ ① が成立します。

よって, $A = n^3 - n \leqq B - n < B = 111\cdots111\times10^{6000}$ $\cdots$ ② が示せました。

($A > C$ の証明)

$n \leqq \sqrt[3]{B} < n+1$ から, $\sqrt[3]{B} - 1 < n \leqq \sqrt[3]{B}$ $\cdots$ ③ が成り立ちます。

また, $B = 111\cdots111\times10^{6000} < 10^{102}\times10^{6000}$ から, $\sqrt[3]{B} < 10^{34}\times10^{2000}$ $\cdots$ ④ と, $\sqrt[3]{B^2} < 10^{68}\times10^{4000}$ $\cdots$ ⑤ が成立します。③⑤から

$$\begin{aligned}
A = n^3 - n &> (\sqrt[3]{B}-1)^3 - \sqrt[3]{B} = B - 3\cdot\sqrt[3]{B^2} + 3\cdot\sqrt[3]{B} - 1 - \sqrt[3]{B}\\
&= B - 3\sqrt[3]{B^2} + 2\sqrt[3]{B} - 1 > B - 3\cdot\sqrt[3]{B^2} - 3\cdot\sqrt[3]{B^2} - 4\cdot\sqrt[3]{B^2} = B - 10\cdot\sqrt[3]{B^2}\\
&> B - 10\times10^{68}\times10^{4000} = B - 10^{4069} > C = 111\cdots110\times10^{6000}\cdots⑥
\end{aligned}$$

途中で, 適当に左辺をより小さい数でおき換えるという事をやっていますが, 精密に考える価値のないぐらい緩い評価の不等式です。最後の $B - 10^{4069}$ を評価するところは, 自分で筆算で計算したつもりになれば, すぐわかると思います。$10^{6000}$ が $10^{4069}$ に比べて十分大きいので, 引き算をしても先頭から 99 個続く「1」には何も影響を与えることはなく, 100 個目の「1」が繰り下がって「0」になるということです。

②⑥から,

$$C \;=\; \underset{(1\text{ が先頭に }99\text{ 個並ぶ})}{111\cdots110} \times 10^{6000} < A = n^3 - n < B = \underset{(1\text{ が先頭に }100\text{ 個並ぶ})}{111\cdots111} \times 10^{6000}$$

が証明できました。

こうやって文章にすると難しそうな証明になってしまいましたが, やっていることはすごく緩い不等式を評価しているだけです。少し訓練すれば高校生でもやれると思いますし, 東大の入試問題を誘導に従って解くよりも随分楽な気がしますがどうなのでしょうか？東大の出題は良心的で必ず (1) を使って解けという出題ではありませんから, 今やった解法でも大丈夫なのでしょう。また証明をよく読んでもらえればわかると思いますが, 東大の出題では, 「99 回以上現れる」となっている部分が「ぴったり 99 回現れて 100 回目は, 1 以外になる」というように, より強い形の数の存在が示されています。

また, この証明は, 多項式ならいつでも同じような事が言えます。例えば $n^8 - 7n^3 - 8n + 9$ という多項式にある $n$ を代入したら, 先頭の 7 桁に「1234567」と並ぶことがあるか？と聞かれたら, $n^8 \fallingdotseq 12345671\times10^{80000}$ とでも設定すればいいのです。「1234567」に最後に「1」を追加し「12345671」としているのは, 引き算がでてくるためで, $10^{80000}$ は, 8 乗根が取りやすく, しかも不等式の評価がものすごく緩くて済むように, 極端に大きく取っただけです。高校生にとっては, こういった緩すぎる不等式の方が必然性が薄くなるため, 逆に難しくなってしまうかもしれません。しかし, 数学とは必要もない厳密性は追求しないと言うことを知ってもらうためのよい練習問題になるでしょう。ゆるゆるの不等式も気楽でいいものです。

## 2 束についての簡単な注意

次に 2004 年名城大の問題をやってみましょう。

問題 2

$x, y$ 平面上の 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ と $C_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ があり, $C_1$ と $C_2$ の 2 つの交点を A, B とし, さらに点 D(3, 1) があるとき, 次の問に答えよ。
(1) 直線 AB の方程式を求めよ。
(2) 3 点 A, B, D の 3 点を通る円の方程式を求めよ。

(1) は $x^2+y^2 = 25$ から, $x^2+y^2-8x-6y+23 = 0$ を引けば出ますね。引くと $8x+6y-48 = 0$ なので, $4x+3y-24 = 0$ が答えです。

普通の参考書は, (ア)「円 $C_1$ と円 $C_2$ の交点を通る円を求める場合」と (イ)「円と直線の交点を通る円を求める場合」に分けて記述してあり,
(ア) なら, (円 $C_1$ の式) + $k$ (円 $C_2$ の式) = 0 (ただし, 円 $C_2$ だけは表示できない。)
(イ) なら, (円 $C_1$ の式) + $k$ (直線の式) = 0 (この場合は, 例外はない。)
とおけると書いてあります。今回のレポートで言いたいのは, (ア) の「円と円の交点を通る円を求めたい場合」であっても片方には, 直線の式を使った方がより便利ではないですか？ということです。この問題の場合なら,

$$(x^2 + y^2 - 25) + k(4x + 3y - 24) = 0$$

とおいてやれば, 円 $C_2$ だけ表示出来ないと言うような例外がまったくなく, 交点 A, B を通る円なら必ず表示することが出来ます。しかも, 中心とか半径も非常に簡単に求まってしまうのです。$(x^2 + y^2 - 25) + k(4x + 3y - 24) = 0$ なら, 中心 $(-2k,\ -\frac{3k}{2})$ という感じです。
この問題の解答を書いておくと, $(x^2 + y^2 - 25) + k(4x + 3y - 24) = 0$ とおき, 点 D(3, 1) の座標を代入すると, $(9 + 1 - 25) + k(12 + 3 - 24) = 0$ より, $-9k = 15$ から $k = -\frac{5}{3}$ なので, $x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 5y + 15 = 0$ が答えとなります。

参考問題 2-1

$y = x^2 - 2x + 7$ と $y = 2x^2 + x + 5$ との交点 A, B と点 C(1, 5) を通る 2 次関数を求めよ。

これも束の考え方が使えますが, $(y - x^2 + 2x - 7) + k(y - 2x^2 - x - 5) = 0$ とおくよりも, 直線 AB を求めてしまって, それを使う方が楽です。直線 AB は, $2y = 2x^2 - 4x + 14$ から, $y = 2x^2 + x + 5$ を引けば, すぐ得られて, $y = -5x + 9$ が直線 AB の式です。これから, 求めたい 2 次関数を

$$(y - x^2 + 2x - 7) + k(y + 5x - 9) = 0$$

とおくことができます。しかも, このおき方は交点 A, B を通る 2 次関数を例外なく表示することが出来ます。あとは点 C(1, 5) の座標を代入して, $k$ を決定です。この問題では, $(5 - 1 + 2 - 7) + k(5 + 5 - 9 = 0)$ より, $k = 1$ となるので, $(y - x^2 + 2x - 7) + 1 \times (y + 5x - 9) = 0$ から $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 8$ が答えです。

参考問題 2-2

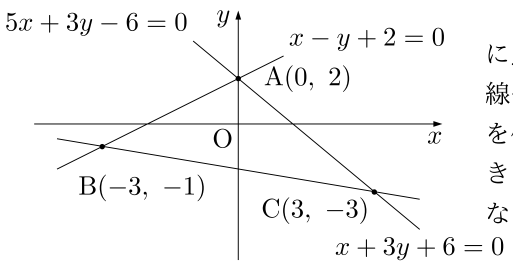
$x-y+2=0, x+3y+6=0, 5x+3y-6=0$ の 3 直線によって出来る三角形の外接円の方程式を $x^2+y^2-ax+by-c=0$ とするとき, $c$ の値を求めよ。(2005 年 自治医科大)

求める円の式を,

$$s(x-y+2)(x+3y+6)+t(x+3y+6)(5x+3y-6)+(5x+3y-6)(x-y+2)=0$$

とおき, この式を展開したときに, $x^2$ と $y^2$ の係数が等しいことと, $xy$ の係数が 0 であることから $s$, $t$ を求めるというような方法があります。一般的な 3 本の直線で同様な問題が 1998 年京都大の後期入試で出題されています。この場合 $x^2$ と $y^2$ の係数が等しいことから $s+5t+5=-3s+9t-3$ $\cdots$ ① が出て $xy$ の係数が 0 であることから, $2s+18t-2=0$ $\cdots$ ② が出ます。この連立方程式を解くと, $s=-\frac{17}{10}$, $t=\frac{3}{10}$ となり, 元の式に代入して両辺を 10 倍すると,
$-17(x-y+2)(x+3y+6)+3(x+3y+6)(5x+3y-6)+10(5x+3y-6)(x-y+2)=0$ $\cdots$ ③
となります。③の左辺の $x^2$ の係数は, $-17+3\times5+10\times5=48$ で, ③の左辺の定数項は, $-17\times2\times6+3\times6\times(-6)+10\times(-6)\times2=-432$ となるので, $-432\div48=-9$ から, $c=9$ となります。このやり方では, $s$, $t$ は簡単に出ても, この後の展開の処理がちょっと面倒ですね。この考え方は, 詳説演習線形代数 (甕江誠夫, 桑垣煥, 笠原皓司) の p176 に出ていて, しかも自治医科大に出題された直線の式とまったく同じです。この入試問題を作成された教授は, この問題集から取ってきたのでしょうか？

ここでは, もう少し別の「束を使った解法」を紹介したいと思います。




(図 1)

まず, 左の図のように, 3 直線の交点を求めます。次に点 B と点 C を通る円を 1 つ求めます。この問題では, 線分 BC を直径とする円が手頃でしょう。それは, 内積を使って $(x+3)(x-3)+(y+1)(y+3)=0$ と表示できます。以上のことから, 点 B と点 C を通る円は, 例外なく (この例外がないという気分がいいですね。)

$$(x+3)(x-3)+(y+1)(y+3)+k(x+3y+6)=0 \quad \cdots ④$$

の形で表示できるので, この式に点 A(0, 2) を代入すると $-9+15+12k=0$ から $k=-\frac{1}{2}$ となり, ④に代入すると,

$$(x+3)(x-3)+(y+1)(y+3)-\frac{1}{2}(x+3y+6)=0$$

ここで, 左辺に (0, 0) を代入すれば, 定数項が, $-9+3-3=-9$ となるので, $c=9$ が答えとなります。

## 3　整数解の個数の処理について

最後に 2009 年の慶応大の問題をやってみましょう。

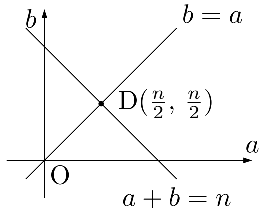
**問題 3**

(1) $a+b+c=60\ (0 \leqq a \leqq b \leqq c)$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何個あるか？
(2) $a+2b+3c=60$ を満たす 0 以上の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何個あるか？

大学への数学 (2015 年 10 月号) の解答は, 次のようになっていました。

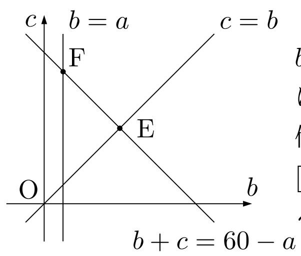
(1) は, $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ を処理するために, $0 \leqq a < b+1 < c+2$ に注意して $x=a,\ y=b+1,\ z=c+2$ とおき $x+y+z=63\ (0 \leqq x < y < z)$ を満たす整数解の個数を求める問題に変換し, 重複組合せを利用して解いていましたが, $x, y, z$ が等しくなる場合を除くのが少し面倒です。

(2) は, $a+2b+3c=a+b+b+c+c+c=c+(b+c)+(a+b+c)$ となることに注意して $x=c,\ y=b+c,\ z=a+b+c$ とおき $x+y+z=60\ (0 \leqq x \leqq y \leqq z)$ を満たす整数解の個数を求める問題に変換すれば, (1) と同じ答えになることは明かである。と書いてありました。確かに, これはなかなか便利な置き換えですね。



(図 2)

今回のレポートでは, 別の考え方で直接求めてしまう解法を紹介したいと思います。まず, 練習として $a+b=n\ (0 \leqq a \leqq b)$ を満たす整数解の個数 $A(n)$ を求めてみましょう。(図 2) の交点 $\mathrm{D}(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2})$ が整数点になるかならないかで, 解の個数が変化しますから, ガウス記号を使って表示すると, $A(n)=[\frac{n}{2}]+1$ となります。次に, $a+b+c=n\ (0 \leqq a \leqq b \leqq c)$ の整数解の個数を $B(n)$ として, $B(60)$ を求めてみましょう。

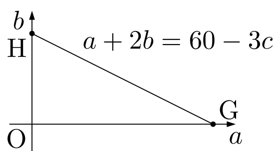


(図 3)

まず, $a$ を固定して, $(b,\ c)$ 平面上で 3 直線 $b+c=60-a,\ c=b,\ b=a$ を考えます。(図 3) の交点 $\mathrm{E}(\frac{60-a}{2},\ \frac{60-a}{2})$ と $\mathrm{F}(a,\ 60-2a)$ に注意すれば, 直線 $b+c=60-a$ 上で条件を満たす格子点の個数は, $[\frac{60-a}{2}]-a+1$ 個となり, この式はガウス記号の性質から, $[30-a+\frac{a}{2}]-a+1=[\frac{a}{2}]-2a+31$ となります。ここで $a$ が動ける範囲は, $0 \leqq a \leqq 20$ で $a$ を変化させて $\sum$ を取れば $B(60)$ が求まります。つまり,

$$
\begin{aligned}
B(60) &= \sum_{a=0}^{20}\left(\left[\frac{a}{2}\right]-2a+31\right) \\
&= (0+0+1+1+\ \cdots\ +9+9+10)-2\times 210+31\times 21=331
\end{aligned}
$$

となります。



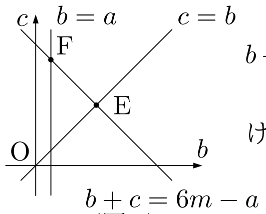
(図 4)

少し丁寧に書いたので面倒そうに見えますが, 実際にやってみると案外楽に求められます。(2) の方も直接, 直線 $a+2b=60-3c$ を考えて求めることが可能です。(図 4) で, 点 $\mathrm{G}(60-3c,\ 0)$, 点 $\mathrm{H}(0,\ \frac{60-3c}{2})$ なので, この直線上の格子点で条件を満たすものは, $[\frac{60-3c}{2}]+1=[\frac{c}{2}]-2c+31$ となり, $0 \leqq c \leqq 20$ ですから, (1) と同じ答えになることがわかります。

**参考問題 3-1**

$a+b+c=6m$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq c)$ を満たす整数解の個数 $B(6m)$ を求めよ。(1996 年東大・後期)

これも,「大学への数学」(東京出版) では, D ランクの問題となっていましたが, 先ほどのやり方なら, 図が少し変わるだけで, ほとんど同様に解けてしまいます。




(図 5)

(図 5) の交点 J$(\frac{6m-a}{2},\ \frac{6m-a}{2})$ と K$(a,\ 6m-2a)$ に注意すれば, 直線 $b+c=6m-a$ 上で条件を満たすものの個数は, $[\frac{6m-a}{2}]-a+1$ 個です。

この式は, $[3m-a+\frac{a}{2}]-a+1=[\frac{a}{2}]-2a+3m+1$ となり, $a$ が動ける範囲は, $0 \leqq a \leqq 2m$ ですから,

$$
\begin{aligned}
B(6m) &= \sum_{a=0}^{2m}\left(\left[\frac{a}{2}\right]-2a+3m+1\right) \\
&= (0+0+1+1+\ \cdots\ +m-1+m-1+m)-2m\times(2m+1)+(3m+1)\times(2m+1) \\
&= (m-1)m+m+(m+1)(2m+1) \\
&= 3m^2+3m+1
\end{aligned}
$$

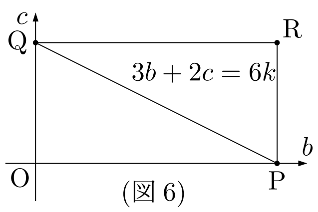
が答えとなります。

(注意) $A(n)=[\frac{n}{2}]+1$ などで, ガウス記号を避けたいのなら, $(-1)^n$ を使えば, $A(n)=\frac{n+1}{2}+\frac{(-1)^n+1}{4}$ のような表示も可能です。こう表示すれば, $\sum$ の計算が機械的操作になりますが, 手計算ではそれほど楽でもありません。

**参考問題 3-2**

$6a+3b+2c \leqq 6m$ を満たす 0 以上の整数解の個数 $S(m)$ を求めよ。(1980 年横浜市立大学)

これは,「入試数学　伝説の良問 100」(安田亨) の 37 番に紹介されている問題です。これも図を上手く使って個数が出せるので, ここに紹介しておきます。




(図 6)

まず $a$ を固定して, $(b,\ c)$ 平面で直線 $3b+2c=6(m-a)$ を考え, この $(b,\ c)$ 平面上で条件を満たす格子点の個数を求めましょう。ただし, $m-a=k$ とおいて, $a$ の替わりに $k$ を 0 から $m$ まで変化させる方が楽なので, この格子点の個数を $T(k)$ とします。(図 6) で直線 PQ の式は $3b+2c=6k$ で, 点 P$(2k,\ 0)$, 点 Q$(0,\ 3k)$, 点 R$(2k,\ 3k)$ となります。

次に, 長方形 OPRQ (周上も含めて) の格子点が, $(2k+1)(3k+1)$ 個あります。線分 PQ 上には $k+1$ 個あるので, それを引いて 2 で割って最後に $k+1$ を加えると $T(k)$ が求まります。

式でかくと，

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{(2k+1)(3k+1)-(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= 3k^2+2k+k+1 \\ &= 3k^2+3k+1 \\ &= (k+1)^3-k^3 \end{aligned}$$

となります。これから，$S(m)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\{(k+1)^3-k^3\}=(m+1)^3$ と楽に求まります。

(注意) $T(k)$ の式が，参考問題 3-1 の答えの式と一致しているのは偶然ではありません。$T(k)$ は，$3b+2c \leqq 6k$ の 0 以上の整数解の個数ですから，$x=6k-3b-2c$, $y=c$, $z=b$ とおけば，$x+2y+3z=6k$ の 0 以上の整数解の個数と対応し，$a+b+c=6k$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq c)$ を満たす整数解の個数 $B(6k)$ の方は，$x=c-b$, $y=b-a$, $z=a$ とおけば，こちらも $x+2y+3z=6k$ の 0 以上の整数解の個数と対応しますから，同じ式になる訳です。

## 参考文献

[1] 安田亨，入試数学　伝説の良問 100，講談社ブルーバックス，2003 年

[2] 斬江誠夫，桑垣煥，笠原晧司，詳説演習線形代数，培風館，1981 年

[3] 大学への数学，東京出版，1996 年 5 月号，2013 年 4 月号，2015 年 10 月号