

# 53



**Sophie Germain's Theorem:**  
If  $x^n + y^n = z^n$  and  $n$  is a prime  $\geq 3$  and  $2n+1$  is a prime, then it must divide  $xyz$ .

- (1) We can assume that  $x, y, z$  are relatively prime to each other.
- (2) So, let's assume that  $n$  doesn't divide  $xyz$ .
- (3) Since  $n$  is odd, we can set  $z' = -z$  and get:  
 $x^n + y^n + (z')^n = 0$ .

**Corollary:**  $x^5 + y^5 = z^5 \rightarrow 5$  divides  $xyz$ .  
This is true by above since 5 is a prime and  $2 \times 5 + 1 = 11$  is a prime.



## 8th Sophie Germain's prime number

表紙の話 (第 53 号にちなんで)

ソフィー・ジェルマンという女性数学者を知っていますか。ガウスとも交流のあったフランスの数学者です。ソフィー・ジェルマンの定理とは、「 $x^n + y^n = z^n$  で、 $n$  が 3 以上の素数で、しかも  $2n + 1$  も素数であれば、 $xyz$  は  $n$  で割れなければならない。」という定理です。これが、フェルマーの最終定理の解決へ大きな貢献をした定理でもあります。ここで、 $n$  も  $2n + 1$  も素数である数をソフィー・ジェルマン素数とも言います。定理には登場しない 2 も含めて、3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, ... と続きます。現在発見されている最大のソフィー・ジェルマン素数は  $8543637900515 \times 2^{666667} - 1$  (200701 桁) です。そう言えば、53 はピタゴラス数にも登場しますね。