

53



Sophie Germain's Theorem:
If $x^n + y^n = z^n$ and n is a prime ≥ 3 and $2n+1$ is a prime, then it must divide xyz .

- (1) We can assume that x, y, z are relatively prime to each other.
- (2) So, let's assume that n doesn't divide xyz .
- (3) Since n is odd, we can set $z' = -z$ and get:
 $x^n + y^n + (z')^n = 0$.

Corollary: $x^5 + y^5 = z^5 \rightarrow 5$ divides xyz .
This is true by above since 5 is a prime and $2 \times 5 + 1 = 11$ is a prime.



8th Sophie Germain's prime number

表紙の話 (第 53 号にちなんで)

ソフィー・ジェルマンという女性数学者を知っていますか。ガウスとも交流のあったフランスの数学者です。ソフィー・ジェルマンの定理とは、「 $x^n + y^n = z^n$ で、 n が 3 以上の素数で、しかも $2n + 1$ も素数であれば、 xyz は n で割れなければならない。」という定理です。これが、フェルマーの最終定理の解決へ大きな貢献をした定理でもあります。ここで、 n も $2n + 1$ も素数である数をソフィー・ジェルマン素数とも言います。定理には登場しない 2 も含めて、3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, ... と続きます。現在発見されている最大のソフィー・ジェルマン素数は $8543637900515 \times 2^{666667} - 1$ (200701 桁) です。そう言えば、53 はピタゴラス数にも登場しますね。