正多角形の方程式について

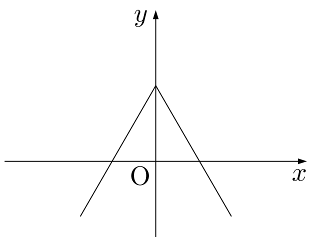
鎌ヶ谷高等学校　新堀 弘騏

1. まえがき

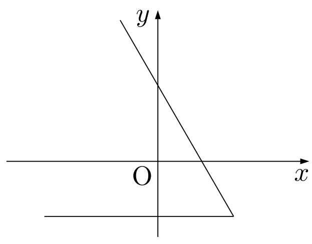
　x, y についての方程式 $f(x, y) = 0$ において，$f(|x|, y) = 0$ と x を $|x|$ におきかえることを x 方向の対称化とよぼう。

　これは，座標平面上に表された $f(x, y) = 0$ のグラフが，$x \geqq 0$ の領域にある部分が y 軸に関して鏡映変換され，結果として全体が y 軸に関して対称化されたグラフとなる故である。

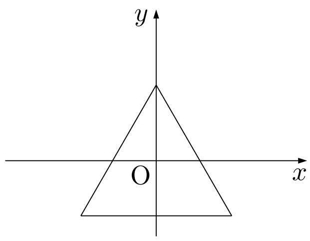
　直線 $y = -\sqrt{3}x + 1$ において，x 方向の対称化を行うと，$y = -\sqrt{3}|x| + 1$ を表すグラフは，y 切片 1 の位置で折れ曲がって，逆 V 字の折れ線となることがわかる。（図①）
これを原点を中心に，右回りに $120°$ だけ回転すると



図①



図②



図③

V 字の 1 辺が x 軸と平行となる。（図②）

　そこで，再び x 方向の対称化を行うと，グラフは図③のように正三角形となる。同時に，方程式の形は

$$\frac{\sqrt{3}|x| - y}{2} = -\sqrt{3}\left|\frac{-|x| - \sqrt{3}y}{2}\right| + 1$$

つまり

$\sqrt{3}\left||x| + \sqrt{3}y\right| + \sqrt{3}|x| - y = 2$ となる。

一般に，重心が原点となる正三角形の方程式は
$\left|\sqrt{3}y+|x|\right|+|x|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y=k$ (k は正の定数) と表せることがわかる。

2. 本論

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|x\sin\frac{2k\pi}{N}-|y|\cos\frac{2k\pi}{N}\right|+\frac{1}{2}\left|y\sin\frac{N\pi}{2}\right|-\frac{1}{2}x\cot\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\pi}{N}$$
$$=\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\frac{2k\pi}{N}-\frac{1}{2}\cot\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\pi}{N}\cdots①$$

ただし，[ ]；Gauss の記号，| |；絶対値の記号
上式は，単位円の周上に頂点をもつ正 N 角形の方程式である。ただし，頂点全体の中に，点 (1,0) が含まれる。

証明するのに，まず，y の絶対値を取り去る。$y\geqq 0$ の領域内で成立すれば，対称化によって，$y\leqq 0$ の領域でも成立するからである。

次に，N を偶数 · 奇数の各場合に分ける。

〔1〕 $N=2n(n=2,3,4,\cdots)$ のとき
$$\sum_{k=1}^{n}\left|x\sin\frac{2k\pi}{2n}-y\cos\frac{2k\pi}{2n}\right|=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n}\cdots②$$
が成り立つことを示そう。

まず，②が原点を中心とする単位円の上半分の周上の点を通ることを示す。

(1，0) を通ることは
$$\sum_{k=1}^{n}\left|1\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n}-0\cdot\cos\frac{2k\pi}{2n}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{2k\pi}{2n}\right|=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n}$$
から明らか。

ℓ を $1\leqq\ell\leqq n$ を満たす任意の自然数とせよ。
$$\left|\cos\ell\frac{\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{2n}-\sin\ell\frac{\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{2n}\right|=\left|\sin(k-\ell)\frac{\pi}{n}\right|$$
であるから

$k\geqq\ell$ のとき，$\left|\sin(k-\ell)\dfrac{\pi}{n}\right|=\sin(k-\ell)\dfrac{\pi}{n}$

$k<\ell$ のとき，$\left|\sin(k-\ell)\dfrac{\pi}{n}\right|=-\sin(k-\ell)\dfrac{\pi}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\cos\ell\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n}-\sin\ell\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{2n}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\sin(k-\ell)\frac{\pi}{n}\right|$$
$$=-\sin(1-\ell)\frac{\pi}{n}-\sin(2-\ell)\frac{\pi}{n}-\cdots+\sin(\ell-\ell)\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin(n-\ell)\frac{\pi}{n}$$
$$=\sin(\ell-1)\frac{\pi}{n}+\sin(\ell-2)\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\left(\ell-(\ell-1)\right)\frac{\pi}{n}+\sin(\ell-\ell)\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}$$
$$+\sin 2\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin(n-\ell)\frac{\pi}{n}$$
$$=\sin\left(n-(\ell-1)\right)\frac{\pi}{n}+\sin\left(n-(\ell-2)\right)\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\left(n-(\ell-\ell)\right)\frac{\pi}{n}$$
$$+\sin\frac{\pi}{n}+\sin 2\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin(n-\ell)\frac{\pi}{n}$$
$$=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}$$

$= \sum_{k=1}^{n} \sin k \cdot \frac{\pi}{n}$

つまり，②は原点中心の単位円周上の正 $2n$ 角形の頂点を通ることがわかる。

次に $\mathrm{P}_\ell \left(\cos \ell \frac{\pi}{n}, \sin \ell \frac{\pi}{n}\right)$,$\mathrm{P}_{\ell+1} \left(\cos(\ell+1)\frac{\pi}{n}, \sin(\ell+1)\frac{\pi}{n}\right)$ として，半直線 OP_ℓ, $\mathrm{OP}_{\ell+1}$ で囲まれた領域に，点 (x, y) が属すものとする。

$\begin{vmatrix} x & y \\ \cos \ell \frac{\pi}{n} & \sin \ell \frac{\pi}{n} \end{vmatrix} = x \sin \ell \frac{\pi}{n} - y \cos \ell \frac{\pi}{n} < 0$

$\begin{vmatrix} x & y \\ \cos(\ell+1)\frac{\pi}{n} & \sin(\ell+1)\frac{\pi}{n} \end{vmatrix} > 0$ であるから

$\sum_{k=1}^{n} \left| x \sin k \frac{\pi}{n} - y \cos k \frac{\pi}{n} \right| = \sum_{k=1}^{\ell} \begin{vmatrix} x & y \\ \cos k \frac{\pi}{n} & \sin k \frac{\pi}{n} \end{vmatrix} + \sum_{k=\ell+1}^{n} \begin{vmatrix} x & y \\ \cos k \frac{\pi}{n} & \sin k \frac{\pi}{n} \end{vmatrix}$

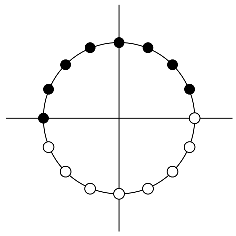
$= \sum_{k=1}^{\ell} \left\{ -\left(x \sin k \frac{\pi}{n} - y \cos k \frac{\pi}{n} \right) \right\} + \sum_{k=\ell+1}^{n} \left(x \sin k \frac{\pi}{n} - y \cos k \frac{\pi}{n} \right)$

$= \left(-\sin \frac{\pi}{n} - \sin 2\frac{\pi}{n} - \cdots + \sin(\ell+1)\frac{\pi}{n} + \cdots + \sin n \frac{\pi}{n} \right) x$

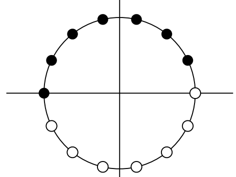
$\quad + \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos 2\frac{\pi}{n} + \cdots + \cos \ell \frac{\pi}{n} - \cos(\ell+1)\frac{\pi}{n} - \cdots - \cos n \frac{\pi}{n} \right) y$

右辺は x, y について 1 次である。その係数が同時に 0 になることはありえない。このことは単位円を $2n$ 個に角 2π を等分して，頂点の位置が決まっていることから，ほぼ明らかである。

タイプ I



タイプ II



x の係数だけ 0 となる可能性がある

したがって，②は $1 \leqq \ell < n$ を満たす各自然数 ℓ に対して，扇形領域 $\ell \frac{\pi}{n} \leqq \theta \leqq (\ell+1)\frac{\pi}{n}$ 内において，単位円の周上の点を通る線分をなすことがわかる。

〔2〕 $N = 2n+1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$\sum_{k=1}^{n} \left| x \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - y \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right| + \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} x \cot \frac{n\pi}{2n+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k\pi}{2n+1} - \frac{1}{2} \cot \frac{n\pi}{2n+1} \cdots$ ③ が成り立つことを示す。

まず，$0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{2n+1}$ なる扇形領域に含まれる直線 $\mathrm{P_0P_1}$ が 2 点 $\mathrm{P}_0(0, 1)$, $\mathrm{P}_1 \left(\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right)$ を通ることを示そう。

$(1, 0)$ を通ることは明らかなので，$\left(\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \sin \frac{2\pi}{2n+1} \right)$ を通ることを示す。

P$\in \left\{\theta | 0<\theta<\dfrac{2\pi}{2n+1}\right\}$ とせよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \begin{vmatrix} x & y \\ \cos\dfrac{2\pi}{2n+1} & \sin\dfrac{2\pi}{2n+1} \end{vmatrix} > 0$$

$1 \leqq k \leqq n$ なる自然数 k に対しても

$$\begin{vmatrix} x & y \\ \cos\dfrac{2k\pi}{2n+1} & \sin\dfrac{2k\pi}{2n+1} \end{vmatrix} > 0$$

が成り立つから，この領域内に含まれる曲線の方程式は③から

$$\left(x\sin\frac{2\pi}{2n+1} - y\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \left(x\sin\frac{4\pi}{2n+1} - y\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cdots$$
$$+\left(x\sin\frac{2n\pi}{2n+1} - y\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

この式が $\left(\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}, \sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ を通ることは，代入してみればわかる。

$$\text{（左辺）} = \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1} - \sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1} - \sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cdots$$
$$+\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} - \sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= 0 + \sin\frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= \sin\frac{2\pi}{2n+1} + \sin\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{2n+1} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

一方，

$$\text{（右辺）} = \sin\frac{2\pi}{2n+1} + \sin\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{2n+1} + \sin\frac{2n\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \frac{2\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{2n+1} - \cos\frac{n\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \frac{1}{2}\frac{-\left(\cos\frac{3n\pi}{2n+1} - \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) - \cos\frac{n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \frac{1}{2}\frac{-\cos\frac{(2n+1)+(n-1)}{2n+1}\pi}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$= \quad \text{〃} \quad + \frac{1}{2}\frac{-\cos\left(\pi - \frac{n-1}{2n+1}\pi\right)}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$= \quad \text{〃} \quad - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{(n+2)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$= \qquad \prime\prime \qquad -\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$= \qquad \prime\prime \qquad -\frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1}$$

$$= \qquad \prime\prime \qquad +\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

$\mathrm{P}_L\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1},\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\right)$, $\mathrm{P}_{L+1}\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1},\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)$ として，半直線 OP_L，OP_{L+1} で囲まれた領域内に点 (x,y) が含まれているものとせよ。

すると

$$\begin{vmatrix} x & y \\ \cos\dfrac{2L\pi}{2n+1} & \sin\dfrac{2L\pi}{2n+1} \end{vmatrix} < 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ \cos\dfrac{2(L+1)\pi}{2n+1} & \sin\dfrac{2(L+1)\pi}{2n+1} \end{vmatrix} > 0$$

なので，直線；

$$-\left(x\sin\frac{2\pi}{2n+1}-y\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\left(x\sin\frac{4\pi}{2n+1}-y\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)-\cdots$$
$$-\left(x\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-y\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\right)+\left(x\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-y\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\cdots+\left(x\sin\frac{2n\pi}{2n+1}-y\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

が点 $\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1},\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\right)$ を通ると仮定して，その上で

点 $\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1},\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)$ を通ることを示そう。

すなわち

$$-\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}-\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\cdots$$
$$-\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)+\cdots$$
$$+\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}-\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cdots(③-L)$$

が成り立つことを仮定して

$$-\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\cdots$$
$$-\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)+\cdots$$
$$+\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{2n\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cdots(③-(L+1))$$

が成り立つことを示す。

$(③-L)$ の左辺

$$-\sin\frac{2(1-L)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(2-L)\pi}{2n+1}-\cdots-\sin\frac{2(L-L)\pi}{2n+1}+\sin\frac{2\cdot1\cdot\pi}{2n+1}+\sin\frac{2\cdot2\cdot\pi}{2n+1}+$$
$$\cdots+\sin\frac{2(n-L)\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sin\frac{2(L-1)\pi}{2n+1}+\sin\frac{2(L-2)\pi}{2n+1}+\cdots+\sin\frac{2\pi}{2n+1}+0+\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{2\cdot2\pi}{2n+1}+$$
$$\cdots+\sin\frac{2(n-L)\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cdots(③-L)'$$

$\bigl(③-(L+1)\bigr)$ の左辺

$$-\sin\frac{2(-L)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(1-L)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(2-L)\pi}{2n+1}-\cdots-\sin\frac{2(-1)\pi}{2n+1}+0+\sin\frac{2\pi}{2n+1}$$
$$+\sin\frac{2\cdot2\pi}{2n+1}+\cdots+\sin\frac{2(n-L-1)\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sin\frac{2L\pi}{2n+1}+\sin\frac{2(L-1)\pi}{2n+1}+\cdots+\sin\frac{2\pi}{2n+1}+0+\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{2\cdot2\pi}{2n+1}+\cdots$$
$$+\sin\frac{2(n-L-1)\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cdots\bigl(③-(L+1)\bigr)'$$

$(③-L)'$ と $\bigl(③-(L+1)\bigr)'$ とを比較して，等しい項を消去し，残りの項を比べると，

$$\sin\frac{2(n-L)\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2L\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2L\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\sin\frac{2L\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}-\frac{1}{2}\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}\cdots④$$

が成立することを示せばよいことがわかる。

④の左辺の第 2 項と第 3 項を通分して，三角関数の加法定理を用いれば

$$\sin\frac{2(n-L)\pi}{2n+1}+\frac{-\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{2(n-L)\pi}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{-\left(\cos\frac{(3n-2L)\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n-2L)\pi}{2n+1}\right)-\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{-\cos\frac{(3n-2L)\pi}{2n+1}+\cos\frac{(n-2L)\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\cdots④'$$

④の右辺も同様に変形すると

$$\sin\frac{2L\pi}{2n+1}+\frac{-\cos\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{-\left(\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n-2L)\pi}{2n+1}\right)-\cos\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}$$
$$=\frac{-\cos\frac{(n+2L)\pi}{2n+1}+\cos\frac{(n-2L)\pi}{2n+1}-\cos\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\cdots④''$$

後は ④$'$ における分子の第 1 項と ④$''$ における分子の第 3 項が等しいことをいえばよい。

$$\begin{aligned}-\cos\frac{(3n-2L)\pi}{2n+1}&=-\cos\frac{(2n+1)+(n-2L-1)}{2n+1}\pi\\&=-\cos\left(\pi+\frac{(n-2L-1)\pi}{2n+1}\right)\\&=\cos\frac{(n-2L-1)\pi}{2n+1}\\&=\cos\frac{(2n+1)-n-2L-2}{2n+1}\pi\\&=\cos\left(\pi-\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}\right)\\&=-\cos\frac{(n+2L+2)\pi}{2n+1}\end{aligned}$$

さて，$L=0$ のとき，直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ が 2 点 $\left(\cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{2n+1},\sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{2n+1}\right)=(1,0)$, $\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1},\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)$ を通ることは既に証明済みであるから，任意の自然数の組 $(L, L+1)$ に対して，直線 $\mathrm{P}_L\mathrm{P}_{L+1}$ は 2 点 $\left(\cos\frac{2L\pi}{2n+1},\sin\frac{2L\pi}{2n+1}\right)$, $\left(\cos\frac{2(L+1)\pi}{2n+1},\sin\frac{2(L+1)\pi}{2n+1}\right)$ を通ることが帰納的に示された。