連分数

磯辺高等学校　氏家 悟

1　はじめに

本校の 3 年生の総合的な学習の時間は，昨年度まで教員が自由に決めた題材による講座制を採っていたので，昨年と一昨年は複素数平面やユークリッドの互除法，循環小数，そして連分数を扱った [*1]。

数学部会春季研究大会で立教大学の杉山健一先生の講演内容が，連分数だったこともあり，本稿では総合的な学習の時間で扱った連分数の教材を紹介する。

といっても，教材のネタはすべて，木村俊一著「連分数のふしぎ」 (ブルーバックス)[*2] から作成したので，詳しくはそちらを参照していただきたい。

2　数の正体

まず，具体的な小数を挙げ，その正体がわかるか [*3]。

次の数は何か。

$0.3333333\cdots$	$3.1415926\cdots$	$1.4142135\cdots$	$3.1428571\cdots$
$2.7182818\cdots$	$1.6180339\cdots$	$4.8989794\cdots$	

$\dfrac{1}{3}$ は循環小数だし，円周率や $\sqrt{2}$ は「覚えている」から答えられる。あとは，$\dfrac{22}{7}$，自然対数の底，黄金比も，覚えていればわかるということである。

最後の $4.8989794\cdots = 2\sqrt{6}$ は覚えている人はまずいないと思うし，覚える必要もない数である。そのような数の正体を，連分数で突き止めようという導入を行った。

3　数当て

「連分数のふしぎ」の著者の木村俊一先生が，講演などの最初に行うとあるので，真似をした。

[*1] 過去数年間の本誌参照
[*2] 杉山先生はこの本は名著だとおっしゃっていました。
[*3] 授業では安い 8 桁の電卓を配って実習したため，本稿ではすべて 8 桁を超える桁を切り捨てている。

（2 桁）÷（2 桁）の小数から，2 桁の整数を当ててみせます。（割り切れないように）

生徒に電卓を配り，計算結果の小数を教えてもらう。電卓を用いて，その小数の連分数表示を行い，元の分数を当てて見せる [*4]。その後，黒板で実演すると，生徒は真似できるようになる。

小数を連分数にするには，整数部を引いて逆数を求める作業となる [*5]。

2 数の商が 1.2903225 であった，元の 2 数を突き止める。
整数部 1，小数部 0.2903225 の逆数 3.4444454
整数部 3，小数部 0.4444454 の逆数 2.2499951
整数部 2，小数部 0.2499951 の逆数 4.0000784

$$1.2903225 = 1 + \frac{1}{3.4444454} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2.249995}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4.0000784}}}$$

最後の小数部は誤差と考えて無視し，下から復元して

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9}} = 1 + \frac{9}{31} = \frac{40}{31}$$

1.2903225 は $40 \div 31$ であったことがわかる。

4　連分数で表す

つづいて，循環節が短いもので，小数を連分数に表す演習を行った。

あ。授業で習った方法で，循環小数を分数にしよう。
い。その分数を連分数にしよう。
う。小数から電卓で連分数にしよう。
$1.278333\cdots$ (3 が繰り返される)　$0.4444\cdots$ (4 が繰り返される)
$0.259259259\cdots$ (259 が繰り返される)

「分数を連分数にしよう。」では，「帯分数にして逆数を取る」という作業となる。

$$0.259259259\cdots = \frac{259}{999} = \frac{1}{\frac{999}{259}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{37}{222}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{222}{37}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}$$

最後が 37 で割り切れているので，もとの分数も 37 で約分できて，$0.259259259\cdots = \dfrac{259}{999} = \dfrac{7}{27}$ とわかる。

[*4] 3 桁以上でもよいが，時間がかかる。

[*5] 電卓で逆数を求めるには，$\boxed{\div}\,\boxed{=}$ あるいは $\boxed{\div}\,\boxed{=}\,\boxed{=}$ とする。スマホの電卓アプリではうまく行かないものがある。

259 や 999 は，高校生にとっては大きな素因数を持っているから，$\dfrac{259}{999}$ の約分に戸惑うところである。この講座を受けたメンバーは，ユークリッドの互除法による約分の演習を終えていたので,「以前やった約分は，今回の『帯分数をとって，逆数』と同じだよ。」と解説できる [*6]。

ユークリッドの互除法は,「真分数の逆数をとって，帯分数にする」という手順と同値でもあり，これを全体としてみたとき，連分数となるから，約分に直接有用な技術であることがわかる。

最後に，小数を電卓で「小数部の逆数を取る」で結果がどうなるかを比べる。

0.2592592 を電卓で。
整数部 0，小数部 0.2592592 の逆数 3.8571437
整数部 3，小数部 0.8571437 の逆数 1.1666655
整数部 1，小数部 0.1666655 の逆数 6.000042
この小数部は 8 桁で切り捨てたことによる「誤差」なので，

$$0.2592592 = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}$$

という連分数とり，これを復元して $0.2592592 = \dfrac{7}{27}$ を得る。

5 連分数の精度

循環節が長いと，すべての桁が 8 桁の電卓では収まらない。それこそ，$3.1428571 = \dfrac{22}{7}$ の最後の数字 1 が次の循環節の始まりと見抜くには，$1 \div 7$ の循環節 142857 を暗記していなければ無理である。連分数を使えば，循環節が見渡せなくても，たちどころに元の分数が突き止められるのである。

連分数を使って簡単な分数で表そう。（数当てに出てきた程度の分数で表す.）

$0.2307692\cdots$　　$1.3114754\cdots$　　$1.2345678\cdots$　　$1.3076923\cdots$

円周率 $3.1415926\cdots$ を $\dfrac{22}{7}$ よりもっと精度のよい分数を求めてみよう。

$$0.2307692\cdots = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2.9999949}} \fallingdotseq \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{13}$$ である。

$\dfrac{3}{13}$ は循環節の長さは 6 桁であるから，7 桁目の「2」は次の循環の始まりであるが，8 桁の電卓ではそれを知る由もない。

さらに，$1.3114754\cdots = 1 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = \dfrac{80}{61}$ に至っては，循環節の長さは 60 桁である [*7]。

[*6] 以前，約分の方法を「帯分数をとって逆数にすることの繰り返しで教わった」という生徒に出会ったことがあった。

[*7] 1.311475409836065573770491803278688524590163934426229508196721 311475 $\cdots$

循環小数から分数を得るとき，教科書の方法では，循環していることが分かっているものについて，循環節すべての桁数を使って行う。しかし，その方法で 60 桁もの循環小数の分数を得るためには，$\dfrac{13114754\cdots721}{9999999\cdots999}$ の約分，つまり $\dfrac{62\text{桁}}{61\text{桁}}$ となるわけである。

それに対し連分数を用いれば，たったの 8 桁から，元の分数が突き止められる。このように，連分数は非常に精度がよいことがわかる。

その精度の良さを利用して，円周率の連分数は，

$$3.1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1.0040866}}}$$

最後の 1.004086 の小数部を無視すれば [*8]

$$3.1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = \frac{355}{113} = 3.1415929$$

を得る。この分数は古代中国で知られていたようで，連分数を用いたのかもしれない。

円周率をたくさん覚えている人にとっては，「7 桁目が違う」ということになるが，これは直径 10000000mm=10km の円周の誤差が 3mm であることなので，問題にならない精度である。

逆に，「3 桁」÷「 3 桁」でここまで精度のよい小数を得られる方が驚きである。$3+\dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7} = 3.1428571$ でも，日常は十分といえ，だれもが暗記している 3.14 との誤差は大差ない。

6 連分数の応用

練習問題　スーパーカブのギア比を簡単な整数比で表わせ。
1 次減速比 4.058　　2 次減速比 2.428
変速比 1 速 2.615　　2 速 1.555　　3 速 1.136　　4 速 0.916

カタログデータなので，小数 3 桁で切り捨てられている。1 次減速比 [*9]$4.058 = \dfrac{2029}{500}$ ではあるが，小さなバイクのギアの歯数が 2029 や 500 ではあるまい。

$$4.058 = 4 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6.9997424}}} = 4 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}} = \frac{2029}{500}$$

と元に戻ってしまうから，後ろから切り捨ててゆく。

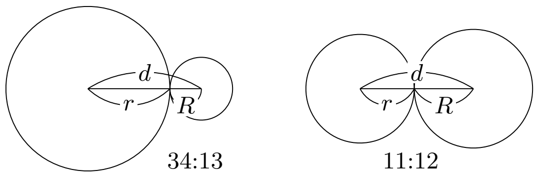
$$4 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{4}} = \frac{280}{69} = 4.057, \qquad 4 + \frac{1}{17} = \frac{69}{17} = 4.058$$

[*8] 実際は $3.1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}$

[*9] クランクシャフトからギアボックスへの減速比

ネットで調べると，1 次減速のギアの歯数は「69 丁，17 丁」と出ているし，小数 3 桁のカタログデータとも一致する。以下 2 次変速比[*10]2.428=17:7，1 速 $2.615 = 34 : 13$，2 速 $1.555 = 14 : 9$，3 速 $1.136 = 25 : 22$，4 速 $0.916 = 11 : 12$ を得る。

さて，1∼4 速の変速ギアは，それぞれメインシャフトとカウンタシャフトの 2 本の軸に取り付けられている。



34:13　　11:12

2 軸間の距離 d は一定なので，ギアの円周の長さの和も一定 $2\pi d$ である[*11]。そうなると，ギアの歯の大きさが同じくらいなら，1∼4 速の歯数の合計は一定に近くなるはずである。

1 速の比の合計 $34 + 13 = 47$ がギアの歯数の合計とすると，2 速の $14 + 9 = 23$ は少なすぎるので，倍の $28 + 18 = 46$ であれば，1 速の合計 47 に近い。これが 2 速ギアの歯数であろうと予想される。

実際，ネットの画像で歯数を数えると，1 速 $2.615 = 34 : 13$ で歯数の和 47，2 速 $1.555 = 28 : 18$ で和 46，3 速 $1.136 = 25 : 22$ で和 47，4 速 $0.916 = 22 : 24$ で和 46 となり，カタログデータとも一致した。こんなことも，連分数から計算できるのである。

7　暦

「連分数のふしぎ」には，さまざまなテーマが取り上げられていたが，閏年の話題は，連分数を扱う以前から授業の小話の一つだったので，教材に反映してみた。

(1)　グレゴリオ暦

現在，国際的に使われている暦で，4 で割れる年が 366 日，ただし，100 で割れる年が 365 日，ただし 400 で割れる年は 366 日となっている。2000 年の閏年は 4 年ごとのものではなく，400 年ぶりのものであった。つまり 400 年に 97 回の閏年になる。

> 2013 年，太陽年は
> 365 日 5 時間 48 分 45.179 秒 $=$ 31556925.179 秒 $=$ 約 365.24218957 日
> より，誤差を計算せよ。

0.24218957 日 $\times 4$ 回 $= 0.96875828$ 日 なので，閏年。$(0.96875828 - 1)$ 日 $\times 25$ 回 $= -0.781043$ 日 なので，$4 \times 25 = 100$ で割れる年が平年。$(1 - 0.78104)$ 日 $\times 4$ 回 $= 0.875828$ 日 なので，$4 \times 25 \times 4 = 400$ で割れる年が閏年。

授業の小話で使うときは,「このまま使い続けると 60 万年で半年ずれる」というもの。

[*10] これはドライブチェーンのスプロケットの歯数の比で，実際は 34 : 14
[*11] $2\pi r + 2\pi R = 2\pi(r + R) = 2\pi d$

$(0.875828-1)$ 日 $\times 8$ 回 $=-0.993376$ 日 なので 3200 年で 0.993376 日ずれるため，60 万年で 186 日ずれる。
3200 年ごとに 2 月 28 日にすることを忘れなければ，次に 1 日ずれるのが，48 万年後である。忘れないように，自分の子孫に言い残してね。

「連分数のふしぎ」には，4 年に 1 度の 2 月 29 日だけしか行わなかったユリウス暦のずれが大きくなったため，グレゴリオ暦が定められた経緯が詳しく書かれている。「連分数のふしぎ」に計算が出ているので，それを教材に。

紀元前 45 年からスタートしたユリウス暦は，1582 年にグレゴリオ暦になるまでに，何日ずれたか。（西暦 0 年はないので $1582-(-45)-1=1626$ 年間である。）

(2) 連分数で精度を上げる

1 年 $=365.24218957$ を連分数表示せよ。

$$365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{30.206552}}}}}$$

ペルシア暦，イラン暦は上記の連分数から作ったと思われると，「連分数のふしぎ」には紹介されているので，それを教材にした。

1079 年にペルシアで始まった暦は，33 年に 8 回の閏年である。
これを使い続けたときの誤差はどうなるか。

$0.24218957\times 33=7.99225581$ を 8 日としているから，33 年で $7.99225581-8=-0.00774419$ 日ずれる。次に 1 日ずれるのは，33 年を $1\div 0.00774419=129$ 回，つまり 4257 年後である。3200 年で 1 日ずれるグレゴリオ暦より精度が高い。

これは連分数の，$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}}=\dfrac{8}{33}$ を使ったと考えられる。

イランを中心に中東の広い地域で使われているイラン暦は，「4 で割れる年 2 月 29 日。ただし，128 年に 1 回の平年。」である。（つまり 128 年に 31 回の閏年）
これを使い続けたときの誤差はどうなるか。

$0.24218957\times 128=31.00026496$ を 31 日としているから，128 年で $31.00026496-31=0.00026496$ 日ずれる。次に 1 日ずれるのは，128 年を $1\div 0.00026496=3774$ 回，つまり 483072

年後である。グレゴリオ暦を 3200 年ごとに見直せば，この精度に近くなる。

これも連分数の，$\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}}=\dfrac{31}{128}$ を使ったと考えられる。

このように，連分数は非常に精度の高い整数比を与えるのである。

(3) 短くなる太陽年

1900 年 1 月 0 日 12 時　365.24219878125 日
2000 年 1 月 0 日 12 時　365.242192640 日
1900 年から 2000 年までの 100 年間に約 0.53 秒, この 100 年間に，0.00000614125 日 =0.53 秒短くなっている。
このまま同様に短くなったとき，1 万年後の太陽年を計算し，連分数表示せよ。

太陽年は，1 年 $= 365.24218957-(0.00000614125\div 100)\times 10000 = 365.241575445$ で，それは $365+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{12.489773}}}}}$

つまり，1 万年後は $\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{1}}}}=\dfrac{43}{178}$ を使えば，178 年に 43 回の閏年となる。

「連分数のふしぎ」には,「5 万年後には 5 年に 1 回閏年で十分，という時代が来るので，40 万年で 1 日しかずれないというのはせいぜいここ 100 年程だけのことなのだ。」とあるとおり，授業の小話の，西暦 3200 年や，60 万年後のずれはナンセンスである。

8 無理数

電卓に適当な数字を入れて「+」「1」「=」「√」と押してみよう。

電卓の「√」を押し続ければ 1 に収束するが，この例題は 1.618033 つまり黄金比に収束する。

$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$ より，$x=\sqrt{1+x}$

これを解くと，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

1.618033 を連分数にせよ。

1.618033 は整数部 1 がつづく（電卓はだんだん誤差が出るが。）$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\cdots}}$

> $1+\dfrac{1}{1}$ $\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$ $\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$
> を求めよ。
> 出てくる数字の規則性は何だろう。

言わずと知れたフィボナッチ数列である。最初に求めた分数を入れ子にして代入することで，次の分数が求まるので，x を求めるために，$x=1+\dfrac{1}{x}$ を解いても良いことが分かり，これが無限連分数の解き方となる。

さらに，小数を求めた生徒が，ひとつひとつが 1.618033 と比べて，順に大小を繰り返すことも見ぬいた。これは，春の研究大会で杉山先生が講演の中で証明していたものである。

> $\sqrt{2}=1.4142135$ を連分数にせよ。

有理数の連分数は有限になるけれど，無理数では無限連分数となる。特に平方根は「循環連分数」となる。

> 次の無理数を連分数で突き止めよ。
> 1.2360680 0.3027756 1.1925824 4.1231056 2.4494897 4.8989794

入れ子構造なので，$1.2360680 = 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}} = x$ とすれば，両辺に 3 を足して，$x+3=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}$ から，$x+3=4+\dfrac{1}{x+3}$ を解いて，$x=-1+\sqrt{5}$ である。

> 次の無理数を循環連分数にせよ。
> $\sqrt{5}$ $\quad\sqrt{3}$

平方根は循環連分数になるが，それ以外の無理数（立方根や円周率）は循環しない。無理数に関しては,「連分数のふしぎ」にも様々な話題に触れられていたが，実施時数が限られていたことと，自身の力不足もあり，これ以上の教材化をすることができなかった。

位取り記数法や計算機のなかった古代においては，円周率をはじめとする無理数の連分数表示やそれと一体のユークリッドの互除法は大変有用だったに違いない。現代においても，小数の正体を見抜いたり，約分に使えたりと，おそらくは知れば何かしら役に立つと思えるワザである。

「連分数のふしぎ」には，ここで紹介した以外にもたくさんの興味深い話題に触れられ，何かの機会に扱いたいものである。