内分・外分の指導法について

若松高等学校　木村 謙二

1　はじめに

内分の公式

$$x = \frac{na+mb}{m+n}$$

内分・外分を指導していて気になるのがこの公式である。この公式の持つ意味をどう表現すればよいのか，何故逆に掛け合わせているのか，図形的に端的に表現できないのか。これらを考えていると，平均の考え方にそのヒントと深い意味があると考えられた。また梃子の原理，天秤のバランスが図的表現に便利ではないかと考え，それをまとめてみた。

2　平均とは

当たり前の様に扱っている平均であるが，ここで改めて確認してみたい。平均の最初は「山分け」であろう。戦利品をすべて机の上に出し（合計），人数によって等分する,「平均＝合計÷人数」が基本である。ここで先ず気になることが 1 つある，合計の単位は何かということだ。対象がお金の場合，合計の単位はためらいなく円である。これは日常で何気なく使っていることでもある。では，次の様な場合はどうだろうか。

例 1　 20 ℃の水 3L と 70 ℃のお湯 2L を混ぜると何度になるか。
20 × 3 ＋ 70 × 2 ＝ 200　　200 ÷ 5 ＝ 40　　答　40 ℃

この計算の 200 の単位は何だろう？200 ℃と考えるのが順当な流れだが，かなりの違和感を抱くであろう。では 200 ℃ L か，そうするとお金の場合は円人という単位になってしまって混乱をきたすであろう。この合計の単位についての明確な認識を持つことはかなり困難だと思われる。ここの話を突き詰めても前進しないので，ここでは問題提起にとどめておくことにする。生徒に対しては誤解を招かぬ様，合計の様なもの，と表現するようにしている。

3　図的表現へのアプローチ

例 1 を図示することを考えよう。

図 1 の様に表現できる。これは 2 : 3 の内分を表すことに他ならない。逆にいえば，内分の計算はこの平均

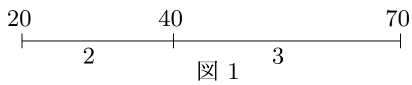

図 1

の計算によって考えられるということである。そこでこの図 1 に，3L と 2L を如何に加えて表現するかということになる。

そこで考えたのが図 2 のモデルである。20 に錘を 3 個つけ，70 に錘を 2 個つけて，バランスのとれた支点に当たる部分が平均・内分点である。この様にすることにより，何故逆に掛け合わせるのかということが視覚的に捉えられるであろう。

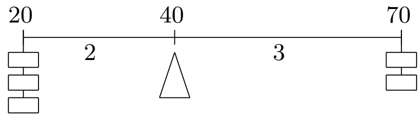

図 2

このような平均の考え方を「加重平均」と呼ぶ様である。

4　内分から外分へ

外分の存在を発見させるために，次の様な例をしばしば用いている。

> 例 2　離れた 2 地点にいる A と B が同時にスタートして一定の速度で直進するとき，どこで出会うだろうか。ただし，A と B の速度比を 2 : 3 とする。

1 次元的に図示してあげれば，外分点の存在に思い至るであろう。全く誰も気付かない様なら，さりげなく進む方向について仄めかしてやればよい。このとき 4 パターンのうち 2 パターンについては解なしとなることについてもしっかりと触れたい（しかし不思議と計算上は解がでるが）。余談になるが，2 人の進む方向と 2 人のお互いに対する思いとを表現してみると面白い話ができるであろう。

さて，外分点の存在の次はその計算法であるが，当然「方向が反対」→「マイナス」という発想に導くことができるであろう。では図 2 の様な説明はできるか，ということで図 3 である。錘を −3 個と考えればよいことがわかる。解は支点にあるということは普遍である。前述の「解なし」の 2 パターンも計算上は計算できてしまうというのは何とも不可思議なところであるが，何故かと生徒に追求されると困るところである。地球は球形だから裏側を廻って戻ってくるということでは，二人とも外側のスタートのとき，地球の裏の方で出会うことになり，計算上の内分点と一致しなくなってしまう。

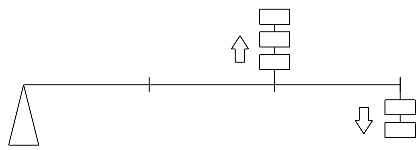

図 3

5　アポロニウスの円へ

例 2 を 2 次元的に考えれば，アポロニウスの円に考え至る。しかし現実を考えてみると，かなり希有な存在である。殆どの場合出会うことができず，すれ違いである。これを人生に於ける出会いとするとなかなか面白い話ができる。「奇跡の出会い（縁）が連続して軌跡たる円が描ける。」といっても悦に入るのは教員ばかりか。

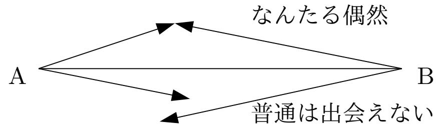

図 4

こうなると 3 次元を考える生徒が出てくるかもしれない。もちろん球であるが，こういった発想ができる生徒を大事に育てていきたいものだ。

6　重心

内分の応用例とすれば重心がその代表格である。この 2 : 1 も天秤の原理で簡単に説明できる（図 5）。更に空間図形で四面体の重心も 3 : 1 と容易に考えることができる（図 6）。

但し，この重心は頂点を質点として考えたものであり，面を板としては考えていない。空間では中身の詰まった物体といえばよいか。平面上では，面で考えても頂点で考えても不思議と同じ重心となる。しかし，なぜか辺で考えた場合のみ別である。楽器のトライアングルをイメージするとわかりやすいだろうか，辺のみに質量がある場合の重心は各辺の中点を頂点とする三角形の内心となる（図 7）。天秤の比率と角の二等分線の比から確認できる。この点のことは Spieker Center と名付けられている。面だけの四面体も似たことが容易に想像できよう。

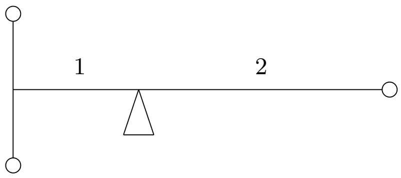

図 5

図 6

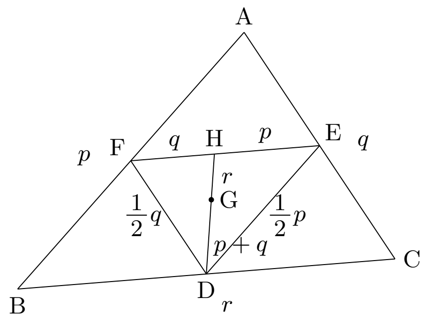

図 7

AB，BC，CA の質量を p，r，q，AB，BC，CA の中点を F，D，E とすると，
AB と AC のバランスから，FH:HE=q:p となる点 H が AB，AC の重心となり，AB+AC と BC のバランスから，HG:GD=r:$p+q$ となる点 G が ABC の重心となる。
また，中点連結定理，角の 2 等分線と線分の比より，G が△ DEF の内心といえる。