「絶対値の付いた関数の不定積分」と「不規則な数列の一般項」

県立柏高等学校　西川 誠

絶対値の付いた積分は，高校数学では定積分の場合でしか出てきませんが，不定積分の形で出題されたとしても求められることを示すのが今回のレポートの 1 つ目の目標です。

もう 40 年以上も前の事ですが,「対話・微分積分（笠原皓司著，現代数学社）」という本の中に $\int |x|dx = \dfrac{|x|x}{2} + C$ というちょっと変わった式が紹介されていました。ずーっと気にはなっていたけれども，特に進展もなく何年も過ぎていきましたが，2 年前に「絶対値の付いた定積分」を教える機会があり，いろいろとやってみると，別の関数でも公式を作ることができました。ただ，その時には，公式を出すのに時間がかかりすぎて，とても実用的ではない方法しか思いつかなかったのです。それが，最近，また「絶対値の付いた定積分」を教えることになったので，少し考えてみたら $\cdots$ ある事に気が付けば,「絶対値の中が 1 次式の場合」は，非常に簡単に求められることがわかったのです。今回のレポートでは，それらを紹介したいと思います。

もう 1 つのテーマは，絶対値とかガウス記号を使うと不規則な数列の一般項が 1 つの式で表示できるという話です。簡単なことですが結果がなかなか面白いと思います。

1　絶対値の中が 1 次関数の場合の解法

まず $\int |x|dx = \dfrac{|x|x}{2} + C$ という公式ですが，右辺を $x \leqq 0$ のときと，$0 \leqq x$ のときで場合分けして微分してみれば成立することがわかります。特に，$x = 0$ の所でも微分可能で，ちゃんと，$|x|$ の原始関数になっているところが面白いですね。次に，これを平行移動して，

公式①

$$\int |x-\alpha|dx = \frac{|x-\alpha|(x-\alpha)}{2} + C$$

という公式は，すぐ作ることができます。2 年前には，これを少し発展させて $\int |x-2|xdx = \dfrac{|x-2|(x-2)(x+1)}{3} + C$ のような公式も作ることは，出来たのですが $\cdots$ 作るのに時間がかかり，しかも，あまり役に立つ訳でもない公式ができただけという認識だったのです。それが，2014 年 11 月 11 日に，$|x-2|$ の関係している積分なら $|x-2|(x-2)$ が答えに影響してくることに気がつきました。これを全面に出せば，すごく速く積分が実行でき

るのです。例えば，次の例でやってみましょう。$\displaystyle\int|x-\alpha|(x-\beta)dx$ の場合なら，$t=x-\alpha$ と置換すると，$\displaystyle\int|t|(t+\alpha-\beta)dt$ となるのですが，これを絶対値のない状態でまず積分します。$\displaystyle\int t(t+\alpha-\beta)dt=\frac{2t^3+3(\alpha-\beta)t^2}{6}+C=\frac{t^2\{2t+3(\alpha-\beta)\}}{6}+C$ を準備して，この t^2 を $|t|t$ で置き換えるだけで，絶対値の付いた関数の不定積分が求められたことになります。つまり，$\displaystyle\int|t|(t+\alpha-\beta)dt=\frac{|t|t\{2t+3(\alpha-\beta)\}}{6}+C$ という公式が得られたわけです。これを，元の x の式で表示すると

公式②

$$\int|x-\alpha|(x-\beta)dx=\frac{|x-\alpha|(x-\alpha)\{2x+(\alpha-3\beta)\}}{6}+C$$

2 年前に作った $\displaystyle\int|x-2|xdx=\frac{|x-2|(x-2)(x+1)}{3}+C$ という式は，$\alpha=2$，$\beta=0$ を代入したものになっています。このレポートでは，これ以上はやりませんが，この公式は，$g(x)$ を x の多項式としたとき，$\displaystyle\int|x-\alpha|g(x)dx$ のような不定積分に，簡単に拡張できます。また，この公式②は，$\displaystyle\int|x-\alpha|(x-\beta)dx=\frac{|x-\alpha|(x-\alpha)^2}{3}+\frac{(\alpha-\beta)|x-\alpha|(x-\alpha)}{2}+C$ とも表示できます。つまり，$(x-\beta)=(x-\alpha+\alpha-\beta)$ と変形して積分したということで $\cdots$ 当然といえば当然の結果です。($t=x-\alpha$ と置換積分して文字をそのままにして表示したようなものです。) また，次のような公式③をいくつか組み合わせて積分が表示できるということとも同じです。

公式③

$$\int|x-\alpha|(x-\alpha)^n dx=\frac{|x-\alpha|(x-\alpha)^{n+1}}{n+2}+C$$

2　公式の実際の適用例

次の定積分で，普通の解法と，公式を使った解法を比較してみましょう。

$$\int_0^3|x-2|(x+3)dx$$

(普通の解法)

$$\int_0^3|x-2|(x+3)dx=\int_0^2\Big\{-(x-2)(x+3)\Big\}dx+\int_2^3(x-2)(x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_2^3=\frac{61}{6}$$

とやるのが，普通の方法です。

(公式②を適用した場合)

$\displaystyle\int |x-\alpha|(x-\beta)dx = \frac{|x-\alpha|(x-\alpha)\{2x+(\alpha-3\beta)\}}{6}+C$ で，$\alpha=2$，$\beta=-3$ の場合に当たりますから，$\displaystyle\int |x-2|(x+3)dx = \frac{|x-2|(x-2)(2x+11)}{6}+C$ となり，

$$\int_0^3 |x-2|(x+3)dx = \left[\frac{|x-2|(x-2)(2x+11)}{6}\right]_0^3 = \frac{61}{6}$$

という答が簡単に得られました。

さらに，次の東北大の入試問題もこの公式②でやってみましょう。「チャート式解法と演習」では，レベル 4 の問題となっていました (レベル 5 まである中でのレベル 4 です)。

東北大の問題

$g(a)=\displaystyle\int_0^1 x|x-a|dx$ で $0<a<1$ の範囲で変化するとき，$g(a)$ の最小値を求めよ。

（解答）公式②で $\alpha=a$，$\beta=0$ を適用すると $\displaystyle\int x|x-a|dx = \frac{|x-a|(x-a)\{2x+a\}}{6}+C$ となり，

$$\int_0^1 x|x-a|dx = \left[\frac{|x-a|(x-a)(2x+a)}{6}\right]_0^1 = \frac{(1-a)^2(a+2)}{6}-\frac{(-a^3)}{6}$$

$$=\frac{a^3-3a+2+a^3}{6}=\frac{2a^3-3a+2}{6}$$

という式が割と簡単に得られました。最小値はこの後，微分して求めるだけなので省略します。

さらに，東京大学の入試問題 (2009 年の文系 4 番) も紹介しておきます。

東大の問題

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，

$$S=\int_0^2 |f'(x)|dx$$

を考える。

(1) $f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき，S を a の関数として表せ。

(2) $f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき S の最小値を求めよ。

（解答）

(1) $c=0$，$4a+2b=2$ なので，$b=1-2a$ となります。$a=0$ のときは，$b=1$ で $S=2$ となります。これから後は $a \neq 0$ として公式①を使います。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 |\,2ax+b\,|dx = \int_0^2 |\,2ax+1-2a\,|dx = |\,2a\,|\int_0^2 \left|x+\frac{1}{2a}-1\right|dx \\
&= \left[\,|\,a\,|\left|x+\frac{1}{2a}-1\right|\left(x+\frac{1}{2a}-1\right)\right]_0^2 = \left|a+\frac{1}{2}\right|\left(1+\frac{1}{2a}\right)-\left|\frac{1}{2}-a\right|\left(\frac{1}{2a}-1\right)
\end{aligned}
$$

となり，結局後は，場合分けしてグラフをかくことになりますが … 積分のところで神経を使わなくていいことが利点でしょうか (今回のレポートでは積分に意味があるので残りの解答は省略します)。

3　絶対値の中が 2 次式の場合

絶対値の中が 2 次式の場合は，試行錯誤の結果，次のような公式にまとめることができました。

公式④

$$
\begin{aligned}
&\int |\,(x-\alpha)(x-\beta)\,|dx \\
&= \frac{|\,(x-\alpha)(x-\beta)\,|\{2x-(\alpha+\beta)\}}{6} + \frac{(\beta-\alpha)^2\{|\,x-\alpha\,|-|\,x-\beta\,|-(x-\beta)\}}{6} + C
\end{aligned}
$$

これは，あまり記憶するのも楽じゃない公式になってしまい，とても実用的じゃありませんが，せっかく作ったので，この公式を使って，次の早稲田大学に出題された入試問題をやってみます。

早稲田大学の問題

$$\int_0^4 |\,x^2-5x+6\,|dx$$

（解答）$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ですから，公式④で $\alpha=2$，$\beta=3$ で，さらに定積分の上端・下端を代入して，計算すると，

$$
\int_0^4 |\,x^2-5x+6\,|dx = \frac{2\times1\times3+(2-1-1)}{6} - \frac{(-2)\times(-3)\times(-5)+(2-3+3)}{6}
$$

$$= \frac{17}{3}$$

と求まります。普通は，$0\leqq x\leqq 2$，$2\leqq x\leqq 3$，$3\leqq x\leqq 4$ と 3 つの区間に分けて積分するところを定積分の上端と下端を代入するだけで求まってしまうというのが面白いですね。

（別解）積分の区間が，あまり長くなくて，符号の変化が 1 回だけなら，この場合も公式②で代用することもできるので，$0\leqq x\leqq 2$，$2\leqq x\leqq 4$ と 2 つの区間に分けて，片方に公式②を適用するという方法もありますよね。つまり

$$
\int_0^4 |\,x^2-5x+6\,|dx = \int_0^2 (x^2-5x+6)dx + \int_2^4 (x-2)|\,x-3\,|dx
$$

と考えて積分すればいいのです。

絶対値の中が 3 次式とか，4 次式にしていくとどんどん複雑になるだけなので … このあたりで別の関数だとどうなるのかを考えてみます。

4　絶対値の中で 1 回だけ符号を変える場合の例

公式⑤

$$\int \left|\sin x - \frac{1}{3}\right| dx = |\cos x - \cos\alpha| - \frac{|x-\alpha|}{6} + C,\quad ただし，0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}，\sin\alpha = \frac{1}{3}$$

公式⑥

$$\int |e^x - \alpha| dx = |e^x - \alpha| - \alpha|x - \log\alpha| + C,\quad ただし，\alpha > 0$$

公式⑦

$$\int e^x |x-\alpha| dx = e^x|x-\alpha| - |e^x - e^\alpha| + C$$

公式⑧

$$\int |\sinh x| dx = \frac{|e^x - 1| - |e^{-x} - 1|}{2} + C,\quad ただし，\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

また，絶対値の中に絶対値が入っている例を 1 つだけあげておきます。

公式⑨

$$\int ||x| - 2| dx = \frac{||x| - 2|x}{2} + |x+2| - |x-2| - x + C$$

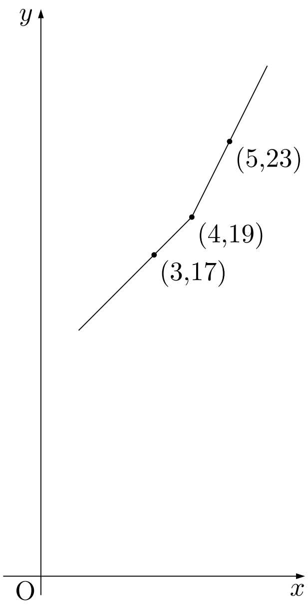
というような感じです。これらは，遊びで作ったようなものなので，実際の大学入試問題に適用しても簡単に問題が解けるというわけではないと思いますが，高校生が課題研究として考える材料としては，面白いと思います。

5　絶対値を使って不規則な数列の一般項を表示してみよう

今年，授業中に使用しているプリントを，入力ミスで次のようにしてしまいました。

数列の問題①

数列 $\{a_n\}$ が，13，15，17，19，23，27，31，…… となっているとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。



つまり，最初は公差 2 の等差数列なのに，第 4 項目から公差が 4 に変化してしまったわけです。これはただのミスですが … 一般項が作れないわけではないので，それを求めてみようというのが今回のレポートのもう 1 つの目標です。グラフで表示すると点 (4, 19) のところで折れ曲がるわけです。折れ曲がるグラフといえば絶対値のグラフですから，この数列は，

$$a_n = \mathrm{A} \times |n-4| + \mathrm{B} \times n + \mathrm{C}$$

の形で表示されるはずです。

後は，点 $(4,19)$ と点 $(3,17)$ と点 $(5,23)$ を代入し

$$\begin{cases} 4\mathrm{B}+\mathrm{C}=19 & \cdots ① \\ \mathrm{A}+3\mathrm{B}+\mathrm{C}=17 & \cdots ② \\ \mathrm{A}+5\mathrm{B}+\mathrm{C}=23 & \cdots ③ \end{cases}$$

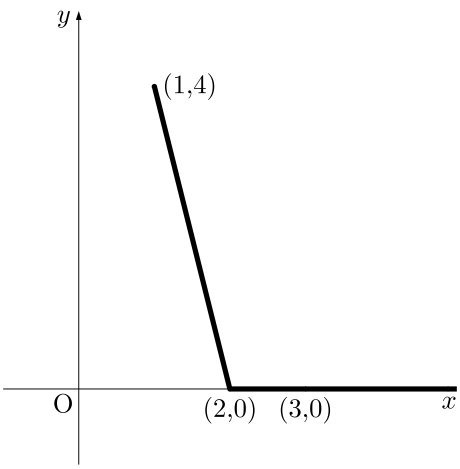
を解いて $\mathrm{A}=1$，$\mathrm{B}=3$，$\mathrm{C}=7$ が求まります。

これで $a_n = |n-4| + 3n + 7$ とめでたく求まりました。

次に，数列の和から一般項を求めるときに，よく初項だけ別扱いする問題が出てきますが，それの一般項を 1 つの式を表示する方法を考えてみます。

数列の問題②

数列 $\{a_n\}$ が，6，4，8，16，32，64，…… となっているとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。



つまり，数列の初項が 6 じゃなくて，初項が 2 だったら，ちゃんとした等比数列になるのですが，初項が 6 なものだから … 等比数列とはいえなくなっているのです。この場合は，少しずらしてあげるのが一番楽な考え方だと思います。

つまり，2，4，8，16，32，64，…… という等比数列に 4，0，0，0，…… という数列を加えたと考えるわけです。この 4，0，0，0，…… は，点 (2, 0) の所で折れ曲がっていると思えばいいのです。高校で扱う数列は第 1 項目から始まるので，0 項目とかは，どうでもいいので，点 (2, 0) が折れ曲がる点と考えていいのです。

$b_n = \mathrm{A} \times |n-2| + \mathrm{B} \times n + \mathrm{C}$ などとでも置いて，点 $(2,0)$ と点 $(1,4)$ と点 $(3,0)$ を代入し，

$$\begin{cases} 2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 & \cdots ① \\ \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=4 & \cdots ② \\ \mathrm{A}+3\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解いて，A $= 2$，B $= -2$，C $= 4$ が求まります。これで $b_n = 2|n-2| - 2n + 4$ となり，$a_n = 2^n + 2|n-2| - 2n + 4$ が求まりました。

6 さらにガウス記号を使っての一般項の表示

数列の問題③

数列 $\{a_n\}$ が，1，7，3，2，0，5，0，8，$\cdots\cdots$(ひとなみにおごれや) となっているとき，この数列の一般項 a_n をガウス記号を使って表示せよ。

いきなり答えですが，こういった変な数列もガウス記号を使えば，

$$a_n = \left[10^{n-1} \times \sqrt{3}\right] - 10 \times \left[10^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{10}\right] \qquad [\quad] \text{はガウス記号を表す。}$$

のように，表示できてしまいます (整数論でよくでてくる表示のさせ方です)。$1.732\cdots$ のように最初の 1 だけ小数点以下ではないので，ちょっと細工して，10 で割ることにより，$0.173\cdots$ と一度変換してやると考えやすいと思います。このような感じで，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，π などで遊ぶことができますね。

数列の問題④

数列 $\{a_n\}$ が，$a_n =$「2^nを 10 で割ったときの余り」となっているとき，この数列の一般項 $\{a_n\}$ をガウス記号を使って表示せよ。

これは，2，4，8，6，2，4，8，6，$\cdots$ と周期的に繰り返す数列です (今年のセンター試験でこの数列に関係する問題が出題されています)。この数列は，sin() とかを使っても表示できるでしょうが，今は，ガウス記号を使って数列の問題③のような表示をやってみましょう。$\alpha = 0.24862486\cdots$ という循環小数だと考えれば問題③と同じアイデアで表示できるわけです。つまり，$\alpha = \dfrac{2486}{9999} = \dfrac{226}{909}$ と置けば，

$$a_n = [10^n \times \alpha] - 10 \times \left[10^{n-1} \times \alpha\right] \qquad [\quad] \text{はガウス記号を表す。}$$

と表示できます。