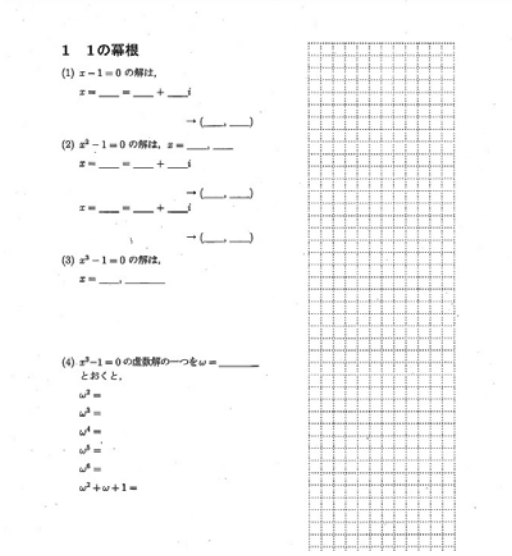
複素数平面

磯辺高等学校　氏家 悟


1　1の冪根

(1) $x-1=0$ の解は，

$x=$ ＿＿ $=$ ＿＿ $+$ ＿＿i

→ (＿＿, ＿＿)

(2) $x^2-1=0$ の解は，$x=$ ＿＿, ＿＿

$x=$ ＿＿ $=$ ＿＿ $+$ ＿＿i

→ (＿＿, ＿＿)

$x=$ ＿＿ $=$ ＿＿ $+$ ＿＿i

→ (＿＿, ＿＿)

(3) $x^3-1=0$ の解は，

$x=$ ＿＿, ＿＿＿＿

(4) $x^3-1=0$ の虚数解の一つを $\omega=$ ＿＿＿＿

とおくと，

$\omega^2=$

$\omega^3=$

$\omega^4=$

$\omega^5=$

$\omega^6=$

$\omega^2+\omega+1=$

1　はじめに

本校の現 3 年生までの教育課程では，総合的な学習の時間は講座制を採っていて，教員が題材を決めて，それを希望する生徒が受講する形になっている。

昨年度の 3 年生の総合的な学習の時間（2 単位）を担当し,「複素数について」という講座で 5 人の生徒に対して扱った題材を紹介する。といっても，目新しいものではなく，1 の冪根やド・モアブルの定理など，10 年以上前の教育課程で扱われていたものである。ただ，性質などを天下りに紹介するのではなく，生徒が自ら発見できるような工夫をしたつもりではある。

2　1 の冪根

1 学期は 1 の冪根を複素数平面にプロットさせることから始めた。$x^n=1$ の $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ の解を複素数平面にプロットさせるのである。

ただし，$n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$ のときは，解の累乗も計算しプロットすることによって，回転の実感をつかめるようにした。

(1)　簡単なもの

3 乗根，4 乗根，6 乗根くらいまでは，簡単に因数分解できる。

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

それらの解をプロットすれば，1 の n 乗根が 1 を頂点とする正 n 角形の頂点に並ぶことが実感できる。そして，それらの解の累乗をプロットすることにより，回転を感じてもらう。

実際のプリントは，すべてのページで，式や問題ごとに数センチのスペースを取り，プリントの右半分は方眼になって，自由にグラフが書けるようにした。

(2)　複 2 次式

8 乗根，12 乗根の因数の 4 次式はいずれも複 2 次式の形になる。

$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)$
$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)=(x^3-1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$x^4-x^2+1=x^4+2x^2+1-3x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2=(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$

上記のように 8 乗根，12 乗根を因数分解で求めることができるが，1 の n 乗根が 1 を頂点とする正 n 角形の頂点に並ぶことから，45°，30° の倍数の三角比からも求めさせた。これは，次のド・モアブルの定理につなげるわけである。

さらに，12 の正の約数が 1,2,3,4,6 であることから 12 乗根のなかには，その約数乗根を含み，それが因数分解を易しくしていることも解説した。

(3)　ド・モアブルの定理

$z=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ のとき，
$z^2=\cos$ ______ $+i\sin$ ______
$z^3=$
$\cdots$
$z=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ$ のとき，
$z^2=$
$z^3=$
$\cdots$

プリントの空欄を埋めさせる。もちろん，値を計算するのではなく,「回転」で角度を求めるだけである。

さらに，毎度 sin cos を書くのが面倒になって,「角を 2 箇所に書かずに済む工夫」ということで，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を天下りに定義して，記述に用いた。

これらのことから，ド・モアブルの定理となるが，これは単純に指数法則といえる。

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(e^{i\theta})^n=$ ______________________

この 30° のように 12 乗して始めて 1 になる複素数を原始 12 乗根という。

そして，$z^5 = z^2 z^3$ から次の積・商の公式は明らかである。

単位円上の複素数の積・商の公式。
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
$(\cos\alpha + i\sin\alpha) \div (\cos\beta + i\sin\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

左辺を展開すれば，三角関数の加法定理の公式を導くのもたやすいが，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ においては，指数法則 $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ である。

こうした性質は，教科書や授業で扱う場合，定理や性質として紹介してから，それを用いた問題演習となると思う。しかし，総合的な学習の時間なので，性質を自然に見つけられるようにした。

(4)　$x^n - 1$ の因数分解

$x^n - 1$ は $x - 1$ を因数に持ち，$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ となるが，両辺を $x - 1$ で割った，$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ は等比数列の和の公式である。

$x^n - 1$ の解は単位円上に並ぶので，その規則性からかならず因数分解できる。特に n に約数がいっぱいある時は，その因数を含むので，規則性がある。

つまり，12 乗根には，1，2，3，4，6 乗根を含み，それら以外の因数が原始 12 乗根を表す式となる。

具体的に，$x^{12} - 1 = (x-1)(x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1)$ において，$(x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1)$ は，2 乗根 $x + 1$，3 乗根 $x^2 + x + 1$，4 乗根 $x^2 + 1$，6 乗根 $x^2 - x + 1$ で割りきれて，原始 12 乗根を表す因数がわかる。

$$\frac{x^{12} - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)} = x^4 - x^2 + 1$$

それを求めるのがメビウスの反転公式を用いた因数分解である。もちろん，厳密な定義を書いても生徒には難しすぎるので，ルールの実例を書いて紹介した。

原始 24 乗根は，24 の正の約数 $d = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ について，d の素因数の数が偶数か，奇数か，2 乗を含むかで $x^{\frac{24}{d}} - 1$ を分子か，分母か，使わないかに振り分ける。
まず，$d = 1$ のとき，$x^{24/1} - 1$ は分子（これが分子にないと原始 24 乗根が求まらない）
$d = 2$ のとき 2 は奇数個の因数なので $x^{24/2} - 1 = x^{12} - 1$ は分母。
$d = 3$ のとき 3 は奇数個の因数なので $x^{24/3} - 1 = x^8 - 1$ は分母。
$d = 4$ のとき 4 は 2 乗を含むので $x^{24/4} - 1 = x^6 - 1$ は使わない。
$d = 6$ のとき で 6 は偶数個の因数なので $x^{24/6} - 1 = x^4 - 1$ は分子。
$d = 8$ のとき 8 は 2 乗を含むので $x^{24/8} - 1 = x^3 - 1$ は使わない。

$d=12$ のとき 12 は 2 乗を含むので $x^{24/12}-1=x^2-1$ は使わない。
$d=24$ のとき 24 は 2 乗を含むので $x^{24/24}-1=x-1$ は使わない。
したがって，原始 24 乗根を与える式は
$\dfrac{(x^{24}-1)(x^4-1)}{(x^{12}-1)(x^8-1)}=\dfrac{x^{28}-x^{24}-x^4+1}{x^{20}-x^{12}-x^8+1}=x^8-x^4+1$

この解は 15° や 75° などの単位円上の 8 つの解を与える。

さて，このように x^n-1 の有理数の範囲の因数分解では，係数に 0,1,−1 しかないように見えるが，$x^{105}-1$ の原始 105 乗根を計算を実演してみせて，反例を示した。自分は Mathematica による計算で事実を見たことがあるが，手計算できる。

原始 105 乗根を与える式は，$\dfrac{(x^{105}-1)(x^7-1)(x^5-1)(x^3-1)}{(x^{35}-1)(x^{21}-1)(x^{15}-1)(x^1-1)}$

全部展開するのではなく，先頭のいくつかの項だけを計算するだけでよい。[*1]

$(x^{105}-1)(x^7-1)(x^5-1)(x^3-1)=(x^{112}-x^{105}+\cdots)(x^5-1)(x^3-1)$
$=(x^{117}-x^{112}-x^{110}+x^{105}-\cdots)(x^3-1)=x^{120}-x^{117}-x^{115}-x^{113}+x^{112}+\cdots$
分母も同様にして，$x^{72}-x^{71}-x^{57}+\cdots$ となるので，
$(x^{120}-x^{117}-x^{115}-x^{113}+x^{112}+\cdots)\div(x^{72}-x^{71}-\cdots)$ より
$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}+\cdots$

$n=1, 2, 3, \cdots, 104$ まで係数は 0,1,−1 で，$n=105$ ではじめて反例が出てくるというわけである。

3 一般の複素数

(1) 単位円上にない複素数

$z=1+\sqrt{3}\,i$ について，
$z^2=$________ $z^3=$________ $z^4=$________ $z^5=$________

どんどん大きくなっていく様子を見せて，絶対値と偏角の定義を与え，次の例題。

$z=1+\sqrt{3}\,i$ について，
$z^2=$ の絶対値は ____________ 偏角は ____________
$z^3=$ の絶対値は ____________ 偏角は ____________
$\cdots$

[*1] この手計算は西川先生（現県立柏高等学校）に教わった。

そして，

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の絶対値は ________________	偏角は ________________
$z^n =$ の絶対値は ________________	偏角は ________________
よって $z^n =$________________	

その後，共役複素数の性質（絶対値，偏角など）を扱い図形との関係につなげる。

(2) 図形の方程式

複素数の和，差はベクトルと同じであるが，積，商が三角形の相似を用いての作図をさせた。

さらに，単位円の方程式 $|z| = 1$，原点が中心で半径 r の円，α が中心で半径 r の円の方程式を求めさせる。

直線はまず，縦軸横軸に平行な直線（それぞれ $z = 2 + yi$，$z = x + 3i$ のようなもの）は簡単である。それ以外は方向ベクトル，法線ベクトル，垂直二等分線（2 定点から等距離）の表現を示した。

4 複素関数 $w = f(z)$

これは 15 年前に所属した学校で最初に池野先生[*2]が行い，翌年自分が真似をした題材である。

(1) 1 次関数

z 平面の図形が w 平面のどんな図形になるかを考えさせる。

「$w = z + \beta$」 $\beta =$______ のとき，	
直線 $z = x + 1i$ は何に写るか。	直線 $z = x + 2i$ は何に写るか。
直線 $z = 1 + yi$ は何に写るか。	直線 $z = 2 + yi$ は何に写るか。

4 本の直線でできた正方形に囲まれた図形がどこに写るか考えさせる。（この例は無論平行移動。）正方形の中に猫を描いて，正方形の頂点に A，B，C，D とし，猫がどこに写るかということである。猫の絵はぶち猫のように左右非対称のであることが，写した後に裏返っているかどうかを確認するのに重要となる。

$w = \alpha z$ は拡大（縮小），$w = \alpha z + \beta$ は拡大（縮小）を平行移動したものとなる。この辺は，行列の一次変換に通じるものがある。

[*2] 流山北高校を定年退職

(2) 分数関数

$w = \dfrac{1}{z}$

直線 $z = x + 1i$ は何に写るか。　直線 $z = x + 2i$ は何に写るか。

直線 $z = 1 + yi$ は何に写るか。　直線 $z = 2 + yi$ は何に写るか。

これは一つだけ自分が例を示し，その他を真似をさせた。

直線 $z = x + 2i$，つまり横軸に平行な直線が何に写るか。

$w = u + vi$ とし，$u + vi = \dfrac{1}{x+2i} = \dfrac{x-2i}{(x+2i)(x-2i)} = \dfrac{x-2i}{x^2+4}$,

実部は，$u = \dfrac{x}{x^2+4}$ 両辺を 2 乗して $u^2 = \dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}$

虚部は，$v = \dfrac{-2}{x^2+4}$ 両辺を 2 乗して $v^2 = \dfrac{4}{(x^2+4)^2}$

$u^2 + v^2 = \dfrac{x^2+4}{(x^2+4)^2} = \dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{v}{-2}$，$u^2 + v^2 + \dfrac{v}{2} = 0$，$u^2 + (v + \dfrac{1}{4})^2 = \dfrac{1}{16}$

中心 $-\dfrac{1}{4}i$, 半径 $\dfrac{1}{4}$ の円。

この円は，直線の単位円についての反転円を横軸について対称に写した円である。

この方法で z 平面の 4 本の直線に囲まれた正方形の中の絵を，w 平面の 4 つの小さな円に写させた。正方形の中の絵も，4 つの円の作る小さな領域に湾曲して押し込まれる。

w 平面の 円を導く計算で，複素数の性質を用いれば，実部，虚部に分ける必要もない。

直線 $z = x + 2i$ は 0 と $4i$ からの距離が等しいので，$|z| = |z - 4i|$.

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$ を代入して，$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w} - 4i\right|$.

両辺を $\left|\dfrac{w}{-4i}\right|$ 倍して $\left|\dfrac{1}{-4i}\right| = \left|\dfrac{1}{-4i} + w\right|$，$\left|w + \dfrac{1}{4}i\right| = \dfrac{1}{4}$.

しかし，こういう式に慣れていない生徒にとって，最後の式から円を思い起こすのはハードルが高いだろう。

(3) 2 次関数

同様に，$w = z^2$ で正方形の中の絵は，4 本の放物線の作る領域に写される。

同じ場所に写る猫を，もう 1 匹探せ。

$w = z^2 = (-z)^2$ であるので，z 平面の図形で，原点について点対称となる位置にある図形も，w 平面の同じ場所に写るのである。4 本の直線をきちんとなぞることができれば，見つけられる。

以上，扱った関数はすべて等角写像である。1 次関数による平行移動，回転と拡大縮小はもちろん，$w = \dfrac{1}{z}$ で写る 4 つの円，$w = z^2$ で写る 4 つの放物線はすべて直交していることを，生徒に確認させた。

昔，授業で扱ったときは，最後に Mathematica で動画を作って見せた。つまり，直線上を動く点が，円や放物線上の点を動くものである。このときは，関数は任意に与えられるように作ったから，指数関数や三角関数（もちろんこれらも等角）を見せた。

(4)　代数学の基本定理

$w = z^3$，$w = 3z^2$ について，

1. 単位円 $|z| = 1$ はどこに写るか。
2. 半径 2 の円 $|z| = 2$ はどこに写るか。
3. 半径 5 の円 $|z| = 5$ はどこに写るか。

$w = z^n$ によって，半径 r の円は ____________________ に写る。

$w = z^3 + 3z^2 + 5$ について，

1. 原点 $z = 0$ はどこに写るか。
2. 単位円 $|z| = 1$ はどこに写るか。
3. 半径 2 の円 $|z| = 2$ はどこに写るか。
4. 半径 100 の円 $|z| = 100$ はどこに写るか。

もちろん，一目でわかるものではない。しかし，原点は $w = 5$ に写り，半径 100 の円は半径ほぼ $|w| = 1000000$ の円に写る。若干 $|3z^2| = 30000$ の揺らぎと，右へ 5 平行移動があるが，巨大な円には影響を与えない。

z 平面で原点から半径を 100 まで連続的に大きくすると，w 平面では，5 から，巨大な円まで連続的に変化するから，その間に 1 回は原点 $w = 0$ を横切る。それが，$z^3 + 3z^2 + 5 = 0$ の解の 1 つであるというのが代数学の基本定理である。図形が原点を横切る様子を，Mathematica で動画を作って見せた。

(5)　5, 7, 9 乗根

正 5 角形の性質から，72° の三角比を求め，1 の 5 乗根を求めよう。

数学 I の演習問題にあるもの。72° が求まれば，ド・モアブルの定理で他を求める。

因数分解で 1 の 5 乗根を求めよう。

1. $x-1$ で割る。
2. 両辺を x^2 で割る。
3. $x+\dfrac{1}{x}=y$ とおいて，変形する。
4. y の方程式を解く。
5. x を復元する。

ここから先は，ほとんどデモンストレーションである。

因数分解で 1 の 7 乗根を求めよう。

1. $x-1$ で割る。
2. 両辺を x^3 で割る。
3. $x+\dfrac{1}{x}=y$ とおいて，変形する。
4. y の方程式を解く。（むむむ）
5. x を復元する。

y の 3 次方程式になる。解と係数との関係から，ラグランジュ・リゾルベント[*3]を用いてみたが，かなり巨大な式になってしまう。

解と係数との関係では，対称式の解説もした。

1 の 9 乗根は，$\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ$ である。
$40^\circ \times 3 = 120^\circ$ から 3 倍角公式を書いてみよう。

結局 3 次方程式となる。

因数分解で 1 の 9 乗根を求めよう。

1. x^3-1 で割る。
2. $x^6+x^3+1=0$ の両辺を x^3 で割る。
3. $x+\dfrac{1}{x}=y$ とおいて，変形する。
4. y の方程式を解く。
5. x を復元する。

y の 3 次方程式は 2 次の項がない（チルンハウス変換が不要）ので，7 乗根ほど巨大な式にはならない。

解と係数との関係から，最終的にはガロア理論かなともよぎったが，方程式の歴史の話をして終わりにした。項目は以下の通り。

方程式とは。
1 次方程式は古代から。
4000 年前のメソポタミアの粘土板「縦横の和が 6 と $\dfrac{1}{2}$，面積が 7 と $\dfrac{1}{2}$ である長方形の縦横を求めよ。」
3 次方程式，4 次方程式（16 世紀イタリア）
アーベルの定理，ガロア理論。

メソポタミアの問題は，当時の解き方を解説した。

[*3] 結城浩著：「数学ガール ガロア理論」,2012

2 学期の途中で終わったので，残りは，ユークリッドの互除法（約分），循環小数，連分数などを話題にして 1 年間を終えた。

(6)　電磁気

生徒の複素数に対する気持ちは「何に使うのだろう」ということだったので，教室へ 20 ワットの小さな卓上扇風機やテスターを持って行き，実験して見せた。

> 扇風機の直流抵抗を測ると ______[Ω] であった。それに 100 ボルトをつなぐとどれだけの電流が流れるか。
> 電力は，電圧×電流であるから，100[V] × ______[A] = ______ ワット

扇風機の直流抵抗は 20[Ω] だった。オームの法則は中学校で習ったというので，計算させると 500 ワット，ドライヤー並みのパワーである。

> 扇風機をコンセントにつなぎ，電流を測ると ______[A] であった。
> したがって，電力は，電圧×電流であるから，100[V] × ______[A] = ______ ワット

実際に，交流電流を測ると，0.2[A] しか流れない。この違いは，扇風機のモーターのコイルが交流電流を妨げる (inpede) するからである。

扇風機の直流抵抗は，モーターコイルの長い電線の抵抗で，交流に対してはそれより大きな抵抗成分がある。それを「リアクタンス」という。

コイルは，電流の変化を妨げる働きをするので，交流では電圧の位相よりも電流の位相が 90 度遅れることがわかっている。つまり，$100\sin t$[V] という交流電圧に対して，$0.2\sin(t-90°)$[A] という電流が流れている。

> 問題を簡単にするため（計算に集中するため），10[Ω] の直流抵抗とリアクタンス 10[Ω] のコイルが並列に 100[V] につながっているとする。
> 10[Ω] の直流抵抗に流れる電流は 100[V] ÷ ______[Ω] =______[A]
> 10[Ω] のリアクタンスのコイル流れる電流は 100[V] ÷ ______[Ω] =______[A]
> で，合計 20[A] 流れそうだが，位相がずれているので，単純に足せない。
> 直流抵抗には $10\sin t$[A]，コイルには位相の遅れた $10\sin(t-90°)$[A] 流れているので，その合計が流れる。
> $10\sin t + 10\sin(t-90°) = 10(\sin t - \cos t) = 10\sqrt{2}\sin(t-45°)$ (三角関数の合成)
> 電力＝電圧×電流　より，$100\sin t \times 10\sqrt{2}\sin(t-45°) = 1000\sqrt{2}\sin t\sin(t-45°) = 1000\sqrt{2}\dfrac{-1}{2}(\cos(2t-45°)-\cos 45°) = -500\sqrt{2}\cos(2t-45°)+500$

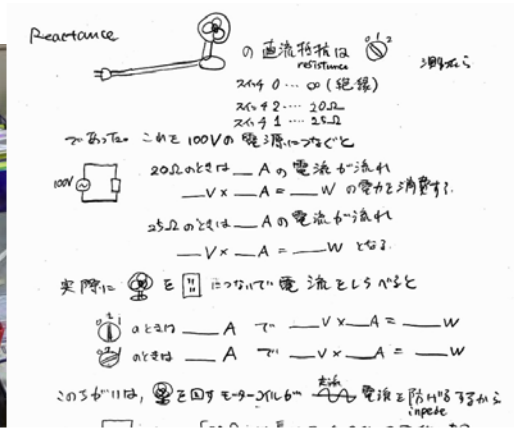
位相が 45° 遅れ，絶対値で 14.1[A] しか流れない。

そして，式の値が負となる時刻はコイルから電源に戻される電力を表している。位相がずれて足されるとどのようになるかを，コイルに流れる電流の大きさ k を変化させて，$10\sin t + k\sin(t-90°)$ の波形を Mathematica で連続的に描いたものを見せた。

この面倒な三角関数の計算を虚数におきかえることにより簡単に行うのである。[*4]

10Ω の直流抵抗に流れる電流 100V ÷ 10Ω=10A
10Ω のリアクタンスのコイル流れる電流 100V ÷ 10Ω = 10A だが，虚数単位 j を使い，位相が遅れるから，$-j10$[A] と表現する。
合計 $10 - j10$[A] の絶対値を求めよ。偏角を求めよ。
電力を求めよ。

無論，絶対値は 14.1，偏角 $-45°$ でそれがそのまま位相のずれになっている。電力は $100[V] \times (10 - j10)[A] = 1000 - j1000$[W]。1000[W] は実効電力で，$-j1000$[W] は電源に戻される無効電力。皮相電力は絶対値の $1000\sqrt{2}$[W] となる。



[*4]電磁気学では i を交流電流に用いるので，虚数単位を j で表す習慣がある。