大学入試センター試作問題の考察

船橋啓明高等学校　大橋 真也

1　はじめに

2015 年 1 月には，新学習指導要領を先行して実施した数学と理科に関して，大学入試センター試験が実施される。大学入試センターでは，この新出項目に関して，試作問題を公開している。すでに多くの先生方は，見て解答していたり，予備校等の解説を聞いていることかもしれない。ここでは，これらと重複するところもあるが，この試作問題を解答し，それに関して感じたことを述べたい。

まだ解いていない方は，まずは自分で解いてみることをおすすめする。

2　数学 I・A

数学 I・A に関して公開されている問題は，数学 I の「データの分析」，数学 A の「整数の性質」から 1 題ずつ出題されている。なお問題番号は便宜的に付けたものである。

2.1　問題

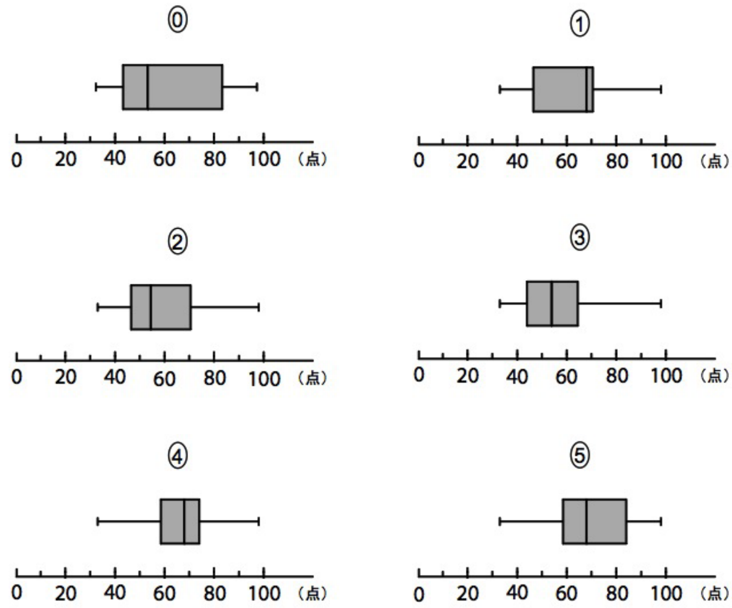
1. 第 1 問

   20 人の生徒に対して，100 点満点で行った国語，数学，英語の 3 教科のテストの得点のデータについて，それぞれの平均値，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を調べたところ，次の表のようになった。ここで表の数値は四捨五入されていない正確な値である。

   以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで 0 にマークすること。

	国語	数学	英語
平均値	57.25	69.40	57.25
最小値	33	33	33
第 1 四分位数	44.0	58.5	46.5
中央値	54.0	68.0	54.5
第 3 四分位数	64.5	84.0	70.5
最大値	98	98	98

(1)　国語，数学，英語の得点の箱ひげ図は，それぞれ，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$である。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$に当てはまるものを，それぞれ次の⓪〜⑤のうちから一つずつ選べ。



(2)　この 20 人の生徒における数学の各得点を 0.5 倍して，さらに各得点に 50 点を加えると，平均値は，$\boxed{\text{エオ}}.\boxed{\text{カ}}$となり，分散の値は，82.8 となった。このことより，数学の分散の値は，$\boxed{\text{キクケ}}.\boxed{\text{コ}}$である。

いま，国語と英語の間のおおよその相関係数の値を求めるために，国語の標準偏差の値と英語の標準偏差の値を小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めたところ，それぞれ，18.0 点と 17.0 点であった。また，国語を英語の共分散の値を 1 の位まで求めると 205 であった。この結果を用いると，国語と英語の相関係数の値は，$0.\boxed{\text{サシ}}$と計算できる。

(3)　相関係数の一般的な性質に関する次の [A] から [C] の説明について，$\boxed{\text{ス}}$ということがいえる。$\boxed{\text{ス}}$に当てはまるものを，次の⓪〜④のうちから一つ選べ。

[A]　相関係数 r は，常に $-1 \leqq r \leqq 1$ であり，すべてのデータが 1 つの曲線上に存在するときには，いつでも $r = 1$ または $r = -1$ である。

[B]　もとのデータを定数倍しても，相関係数の値は変わらないが，もとのデータに定数を加えると相関係数の値は変わる。

[C]　2 つの変量間の相関係数の値が高い場合には，これらの 2 つの変量には因果関係があるといえる。

⓪ [A] だけが正しい　　① [B] だけが正しい
② [C] だけが正しい　　③ [A] だけが間違っている

④ ⓪〜③のどれでもない

2. 第 2 問

(1) 不定方程式 $8x+5y=k$ の整数解について考える。

(i) $k=1$ とする。

$x>-10,\ y>-10$ を満たす解は

$$(x,\,y)=\left(\boxed{\text{アイ}},\boxed{\text{ウエ}}\right),\ \left(\boxed{\text{オカ}},\boxed{\text{キ}}\right),\ \left(\boxed{\text{ク}},\boxed{\text{ケコ}}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{アイ}}<\boxed{\text{オカ}}<\boxed{\text{ク}}$ とする。

(ii) $k=17$ とする。

$0<x+y<100$ を満たす解は $\boxed{\text{サシ}}$ 個ある。

(2) 和が 600，最小公倍数が 5772 である 2 つの自然数 $a,\,b\,(a>b)$ がある。

$a,\,b$ の最大公約数を G とし，$a=a'G,\,b=b'G$ とすると，a' と b' の最大公約数は $\boxed{\text{ス}}$ である。また，$a'G+b'G=600,\,a'b'G=5772$ である。

ここで，600，5772 をそれぞれ素因数分解すると

$$\begin{aligned}600 &= 2^3\cdot 3\cdot 5^2\\ 5772 &= 2^{\boxed{\text{セ}}}\cdot\boxed{\text{ソ}}\cdot 13\cdot 37\end{aligned}$$

であるから $G=\boxed{\text{タチ}}$ である。したがって，$a=\boxed{\text{ツテト}},\ b=\boxed{\text{ナニヌ}}$ である。

このとき，$G=ma+nb$ を満たす整数 $m,\,n$ の組のうち，m の値が正で最小であるものは，$m=\boxed{\text{ネ}},\ n=\boxed{\text{ノハヒ}}$ である。

2.2 解答

1. (1) 箱ひげ図を中央値，第 1 四分位数，第 3 四分位数，最大値，最小値の順に見ていけば，読み取れる。

国語 ③$\cdots\boxed{\text{ア}}$

数学 ⑤$\cdots\boxed{\text{イ}}$

英語 ②$\cdots\boxed{\text{ウ}}$

(2) $69.4\times 0.5+50=84.7\cdots\boxed{\text{エオ}},\boxed{\text{カ}}$

数学の分散を V とすると，$0.5^2V=82.8$ であるから，$V=331.2\cdots\boxed{\text{キクケ}},\boxed{\text{コ}}$

相関係数は，$\dfrac{205}{18\times 17}=0.6699\cdots\fallingdotseq 0.67\cdots\boxed{\text{サシ}}$

(3) [A] については，$r=1$ または $r=-1$ となるのは，曲線上ではなく，直線上であるため，誤っている。

[B] については，定数を加えても共分散や標準偏差自体は変化しないので，相関係数は変化しないことから，誤っている。

[C] については，相関係数は，因果関係を表すものではないので，誤りである。

したがって，④ が正解である。$\cdots\boxed{\text{ス}}$

2. (1) (i) $8x+5y=1$ より，整数解のひとつとして $(x,\,y)=(2,\,-3)$ がみつかるから，
$8\times 2+5\times(-3)=1$，これらを辺々引き算して，
$8(x-2)+5(y+3)=0$
$8(x-2)=-5(y+3)$
8 と 5 は互いに素であることから，$x=5n+2,\quad y=-8n-3\quad$ (n は整数) とおくことができる。
条件より，$5n-2>-10, -8n-3>-10$ であることから，
$-2.4\leqq n\leqq\dfrac{7}{8}$ であることから，$n=-2,\,-1,\,0$
これらを代入して，

$$(x,\,y)=(-8,\,13)\,,\,(-3,\,5)\,,\,(2,\,-3)$$

$\cdots$ $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オカ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケコ}}$

(ii) $8x+5y=17$ であるから，
この整数解のひとつは，$(x,\,y)=(2\times 17,\,-3\times 17)=(34,\,-51)$
(i) と同様に考えて，$x=5m+34,\,y=-8m-51\quad$ (m は整数) とおくことができる。
$x+y=-3m-17$ であるから，$-39<m<-\dfrac{17}{3}=-5.666\cdots$ であるから，
整数解は，33 個ある。$\cdots$ $\boxed{\text{サシ}}$

(2) G' は最大公約数なので，a' と b' は互いに素である。
よって，a' と b' の最大公約数は 1 である。$\cdots$ $\boxed{\text{ス}}$

$$5772=2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 37\cdots\boxed{\text{セ}},\boxed{\text{ソ}}$$

よって，$a'+b'$ と $a'b'$ も互いに素であることから，
600 と 5772 の最大公約数を考えて，$G=12$ である。$\cdots$ $\boxed{\text{タチ}}$
これより，$a=12\times 37=444,\,b=12\times 13=156\cdots$ $\boxed{\text{ツテト}}$, $\boxed{\text{ナニヌ}}$
$G=ma+nb$ は，$1=ma'+nb'$ であるから，
不定方程式 $37m+13n=1$ の整数解を考えればよい。
ユークリッドの互除法より，

$$m=13\ell-7,\,y=-37\ell+20\quad(\ell\text{は整数})$$

とおくことができる。$\ell=1$ のときが，m が正で最小の解になるから，
$m=6,\,n=-17\cdots$ $\boxed{\text{ネ}}$, $\boxed{\text{ノネハ}}$

2.3 解説

2.3.1 第 1 問について

(1) の箱ひげ図の読み取りに関しては，容易である。きちんと箱ひげ図の意味することが分かれば，答えを絞り込むことができるだろう。

(2) の平均値や分散に関しては，数学 B で扱われている $E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma X$ 等の公式を知っていると便利である。それらを知らない場合には，平均値や分散の定義に戻って考えなければならない。そのため，数学 I の問題としては，やや難しく感じられるだろう。

相関係数に関しては，必要な情報が示されているので，簡単な計算をすればよいだけである。

(3) は，正誤問題である。センター試験としても珍しい出題形式であるが，問題をよく読んでいれば，引っかかることはない。上述の数学 B の公式を知っていれば，理解しやすいものもあるだろう。また相関関係と因果関係は，きちんと区別しておきたい。

2.3.2 第 2 問について

第 2 問については，ほとんどが不定方程式の解法である。不定方程式では，まず整数解をひとつ見つけることからはじまる。教科書では，ユークリッドの互除法からの変形で解いているものが多いが，特殊解が簡単な試行錯誤で求まるようなものに関しては，それでもよいだろう。

また，教科書には発展や参考として合同式が載っているので，これを使って不定方程式を解けるように練習しておくと速く解くことができるだろう。

(2) に関しても，13 を法として考えると，

$$-2m \equiv 1 \equiv 14$$

となるから，$m \equiv -7$，すなわち $m = 13\ell - 7$ と，すぐに求めることができるので，ある程度まで，合同式に慣れておくことも必要であると考える。

2.4 考察

「データの分析」に関しては，必答問題であるため，きちんとした対策を必要とするだろう。問題にもあるように単なる計算や公式の適用だけではなく，平均値や標準偏差，相関係数などの意味をきちんと理解させることも必要である。

「整数の性質」に関しては，数学 A の 3 題中 2 題選択する選択問題の一部である。この問題を選択しないこともできるが，解答する際は，この単元に関しては，不定方程式の解法は必須のものと考えておいた方がよいだろう。

また今回の出題からは漏れているが，n 進法の問題の対策も必要であろう。

3 数学 II・B

数学 B に関して,「確率分布と統計的な推測」が公開されている。

3.1　問題

1. 第〇問

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで ⓪ にマークすること。

(1)　1 から 5 までの数字が，それぞれ 1 つずつ書かれた 5 枚のカードが，箱の中に入っている。この箱から，2 枚のカードを同時に無作為に抽出するとき，取り出されたカードに書かれている数字の小さい方を S，大きい方を T とする。

このとき $P(S=1)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $P(T=4)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ となる。同様にして，S, T の確率分布を求めてから それぞれの期待値を計算すると，$E(S)=\boxed{\text{カ}}$, $E(T)=\boxed{\text{キ}}$ となる。したがって，$E(aS-1)$ および $E(bT-1)$ がカードの枚数 5 と等しくなるためには，$a=\boxed{\text{ク}}$, $b=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ でなければならない。

(2)　1 から 5 までの数字が，それぞれ 1 つずつ書かれた何枚かのカードが，箱の中に入っている。1 と書かれたカードが入っている割合を p とする。この箱から，カードを無作為に復元抽出する試行を 100 回行い，そのうち 1 と書かれたカードが取り出された回数を X とする。

(i) もし $p=\dfrac{1}{5}$ であるとすれば，確率変数 X は平均 $\boxed{\text{サシ}}$，標準偏差 $\boxed{\text{ス}}$ の二項分布に従う。ここで，試行回数 100 は十分大きいと考えられるので，$R=\dfrac{X}{100}$ とおけば，R は近似的に平均 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，標準偏差 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ の正規分布に従う。

(ii) X が 10 であったとき，1 の出る割合 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}},\ \boxed{\text{ニ}}.\boxed{\text{ヌネ}}\right]$$

と計算できる。ただし，Z を標準正規分布に従う確率変数とするとき，$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96)=0.95$ である。

3.2　解答

1. (1) $P(S=1)=\dfrac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{5}\cdots\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}}$

$P(T=4)=\dfrac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}\cdots\boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エオ}}$

$E(S)=1\times\dfrac{4}{10}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{2}{10}+4\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{20}{10}=2\cdots\boxed{\text{カ}}$

$E(T)=5\times\dfrac{4}{10}+4\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{2}{10}+2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{40}{10}=4\cdots\boxed{\text{キ}}$

$E(aS-1)=aE(S)-1=5$ であることから，$a=3\cdots\boxed{\text{ク}}$

$E(bT-1)=bE(S)-1=5$ であることから，$b=\dfrac{3}{2}\cdots$ $\boxed{\text{ケ}}$

(2) (i) X は，二項分布 $B\left(100, \dfrac{1}{5}\right)$ に従っているから，

$E(X)=np=100\times\dfrac{1}{5}=20\cdots$ $\boxed{\text{サシ}}$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}}=\sqrt{16}=4\cdots$ $\boxed{\text{ス}}$

$R=\dfrac{X}{100}$ とすると，$E(R)=\dfrac{1}{100}\times E(X)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}\cdots$ $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$

$\sigma(R)=\dfrac{1}{100}\times\sigma(X)=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25}\cdots$ $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チツ}}$

(ii) $R'=\dfrac{10}{100}=0.1$, $\sqrt{\dfrac{R'(1-R')}{100}}=\sqrt{\dfrac{0.1\times 0.9}{100}}=\dfrac{3}{100}=0.03$ であるから，
95%の信頼区間は，

$$\Big[0.1-1.96\times 0.03,\ 0.1+1.96\times 0.03\Big]$$

$$\Big[0.04,\ 0.16\Big]\cdots \boxed{\text{テ}},\boxed{\text{トナ}},\boxed{\text{ニ}},\boxed{\text{ヌネ}}$$

3.3 解説

(1) は，基本的な問題である。$E(aX+b)=aE(X)+b$ の公式を覚えていれば，問題はないだろう。同様に $V(aX+b)=a^2V(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma X$ もよく使う公式である。

(2) の (i) も同様の公式ですぐにできる。中心極限定理が成り立つので，正規分布に近づくと考えるが，平均や標準偏差の基本は同様である。

(ii) についても信頼区間の公式に当てはめるだけである。問題自体に 1.96 という数値が書かれており，小数第 3 位を四捨五入するという問題の最初の注意さえ見落とさなければ，簡単な問題である。

3.4 考察

内容の一部が数学 I に移動しているので，旧課程数学 II・B の統計分野の問題とは，かなり異なる問題となる。他の「数列」や「ベクトル」とともに 3 題中 2 題の選択問題であり，これを選択する受験生は少ないかもしれないが，この問題を解答するためには，きちんと公式を覚えてさえいれば，計算も容易であるし，解答しやすい問題であろう。正規分布や標本と母集団に関係する問題も出題される可能性もあるだろう。

4 おわりに

新学習指導要領に関しては，実際の本番の大学入試センター試験の問題や追試験の問題を見てからでなければ分からないが，数学 I，A，B の新出項目の学習や受験対策も多少考慮して，

日々の授業内容も修正していく必要があるだろう。

データの分析に関しては，単なる計算やグラフを描かせるだけでなく，それらの相互の関係や性質まで，踏み込んで学習を深めていく必要があると感じた。

整数の性質に関しては，本校でも選択しているが，合同式などさまざまな方法で，特殊解を求める練習をする必要があると感じた。