ある条件をみたす2次関数の最大値問題の一般的解法

県立柏高等学校　西川 誠

ブルーバックスの「入試数学　伝説の良問100」(安田亨）の中の問題6について，少し変わった解法ができましたので，今回のレポートではそれを紹介します。証明はともかく，課題研究等の問題として，3次元空間での領域の図示などを工夫したり，あるいは，生徒と一緒に，コンピュータで数値実験してみるのに，ちょうどよい教材だと思います。

1　問題6（1981年学習院大）とその（安田先生の）解法

それでは,「入試数学　伝説の良問100」(安田亨）の問題6から $\cdots$

問題6

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-1 \leqq ax^2+bx+c \leqq 1$　が成立するならば
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-4 \leqq 2ax+b \leqq 4$　が成立することを示せ。

（安田先生の解法の抜粋）

$y=2ax+b\,(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値は，$x=1$ のときか，$x=-1$ のときなので　$-4 \leqq 2a+b \leqq 4$ が成立することを示せば十分です。
（$-4 \leqq -2a+b \leqq 4$　の方も同様に示せるので片方のみ示すことにします。）
$a+b+c=p$，$a-b+c=q$ とおくと，$-1 \leqq p \leqq 1$，$-1 \leqq q \leqq 1$ で，また $-1 \leqq c \leqq 1$ にも注意して，a，b を p，q，c で表すと $a=\dfrac{p+q}{2}-c$，$b=\dfrac{p-q}{2}$ となり，$2a+b=\dfrac{3p}{2}+\dfrac{q}{2}-2c$ なので，$|2a+b| \leqq \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}+2=4$ となります。　（証明終わり）

これは，結局

$$x=1 \text{ のとき}, -1 \leqq 1a+1b+1c \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$x=0 \text{ のとき}, -1 \leqq 0a+0b+c \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$x=-1 \text{ のとき}, -1 \leqq 1a-1b+1c \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の 3 つの不等式から，$2a+b$ を作るために，① $\times \dfrac{3}{2}$ + ② $\times \dfrac{1}{2}$ + ③ $\times (-2)$ を考えると，$|2a+b| \leqq \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}+2=4$ となるということです。

解答には，$x=1$，0，-1 の3つの場合を代入した $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$ の関係した不等式を使い，巧妙に解けるのですが，それは，評価する式が $2ax+b$ だったから解けただけではないのか？という疑問が私にはあったのです。実際いろいろ実験してみると，$x=1$，0，-1 の3つの

場合だけ考えて解けるものではないということを示すのも，今回のレポートの内容の 1 つです。

この 6 番の問題の場合は，チェビシェフ多項式 $T_2(x) = 2x^2 - 1$ が，ちょうどこの不等式の等号条件を満たす式となっていたので，うまくいっているようです。安田先生の本の中には，少し上級の問題では補間法が重要で，しかも補間法だと，この手の問題がたいてい解けるかのような表現があるのですが，ちょっと無理があるのではないでしょうか？例えば $2ax + b$ の 2 の場所を少し移動して $ax + 2b$ を評価する問題にしたものを考えるとどうなるでしょうか？

2 問題6の改題その1

改題その 1

「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2 + bx + c\,| \leqq 1$ となる任意の a，b，c に対して
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax + 2b\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？

$-1 \leqq 1a + 1b + 1c \leqq 1$ ………………… ①

$-1 \leqq 0a + 0b + c \leqq 1$ ………………… ②

$-1 \leqq 1a - 1b + 1c \leqq 1$ ………………… ③

の 3 つの不等式から，$a + 2b$ を作るために，① $\times \dfrac{3}{2}$ + ② $\times (-1)$ + ③ $\times \dfrac{(-1)}{2}$ を考えると，$|a + 2b| \leqq \dfrac{3}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} = 3$ となり，$M = 3$ となるのなら話は簡単なのですが，この 3 になる a，b，c は存在しないのです。$|a + 2b| \leqq 3$ は必ず成立しますが，これは甘く評価された不等式なのです。

これを解くために私の考えた方法を紹介したいと思いますが，その前に，簡単にわかる a，b，c の範囲をおさえておきます。

$-1 \leqq 1a + 1b + 1c \leqq 1$ ………………… ①

$-1 \leqq 0a + 0b + c \leqq 1$ ………………… ②

$-1 \leqq 1a - 1b + 1c \leqq 1$ ………………… ③

の 3 つの不等式は必ず成立することから，$-2 \leqq a \leqq 2$，$-1 \leqq b \leqq 1$，$-1 \leqq c \leqq 1$ であることが必要条件です。

3 改題その1の解法

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-1 \leqq ax^2 + bx + c \leqq 1$ が成立するという条件を，a，b，c を座標とする 3 次元空間で図示した図を想像してみてください。

$-1 \leqq a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c \leqq 1$

⋮ (途中省略)

$-1 \leqq a \times (\alpha)^2 + b \times (\alpha) + c \leqq 1$ ← α はー1から1までの任意の実数です。

$\vdots$ (途中省略)

$-1 \leqq a \times (+1)^2 + b \times (+1) + c \leqq 1$

のような，たくさんの不等式で挟まれる領域を図示することになります。

まず，重要なのは，$x = 1$ と $x = -1$ を代入したときの不等式です。

その次は，頂点の x 座標が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲に入るかどうかで，場合分けをすることになります。

今，一般的な場合をいきなり考えると場合分けが面倒なので，$a > 0$，$b > 0$，$-1 \leqq c \leqq 0$ のときだけを，まず考えることにします。

$y = ax^2 + bx + c$ を平方完成すると $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ となりますから，
$-1 \leqq -\dfrac{b}{2a} \leqq 1$ のときは，$-1 \leqq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \leqq 1$ が必要条件となります。

今は，$a > 0$ の場合のみ考えているので，分母を払って整理すると，$-2a \leqq b \leqq 2a$，
$-4a \leqq 4ac - b^2 \leqq 4a$ となり，さらに整理すると $-2a \leqq b \leqq 2a$，$4a(c-1) \leqq b^2 \leqq 4a(c+1)$ となります。

$a > 0$，$b > 0$，$-1 \leqq c \leqq 0$ のときだけ考えていますから，$-2a \leqq b$ と $4a(c-1) \leqq b^2$ は，自動的に成り立っています。だから頂点に関しては，$b \leqq 2a$，$b^2 \leqq 4a(c+1)$ という2つの不等式だけを気にすればよくて，これに $-1 \leqq a + b + c \leqq 1$ と $-1 \leqq a - b + c \leqq 1$ という端の条件を追加すれば十分です。

この改題その1の問題の場合は，$|ax + 2b| \leqq M$ という不等式の評価ですから，条件の式を空間で考えるのではなくて，(a, b) 平面に射影したものを変えた方が楽です。c の値を0から -1 まで少しずつ変化させて，領域がどうなるかを考えてみます。

図1：$c = 0$ のとき　$b = -a + 1$ と $b = a + 1$ の2本の直線のみ示してあります。
本当の断面の図は正方形なのですが，今は第1象限のみ気にしています。

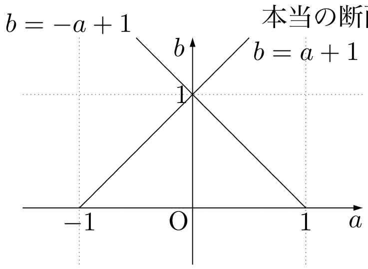
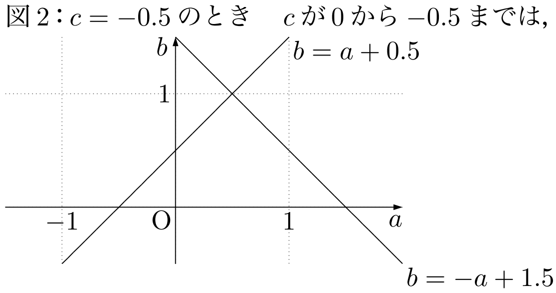


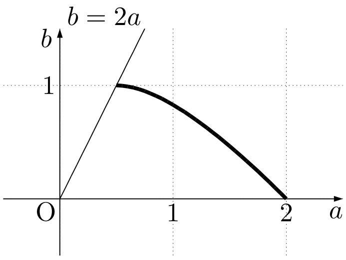
図2：$c = -0.5$ のとき　c が0から -0.5 までは，正方形が右の方向に少しずつずれていきます。



$-0.5 \leqq c \leqq 0$ の時は，頂点が意味をなしませんが，$-1 \leqq c \leqq -0.5$ のときは，頂点の影響も考えないとだめになります。この場合，c の各値に対して断面図を図示することが重要なのではなくて，すべてを合わせて考えて (a, b) 平面に射影したものが重要となります。つまり，$a+b+c=1$ と $b^2=4a(c+1)$ との交点の動きを押さえることが重要です。

$a+b+c=1$ と $b^2=4a(c+1)$ から c を消去すると，$b^2=4a(1-a-b+1)$ となり，$b^2=8a-4a^2-4ab$ からさらに整理すると，$(b+2a)^2=8a$ が出てきて，$b=-2a+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ となります。第 1 象限の部分だけ図示すると以下のようになります。

図 3：



太線は $b=-2a+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ のグラフです。
（この曲線より下にないとだめです。）

この領域において直線 $a+2b=k$ が共有点をもつように動くと考えると，直線 $a+2b=k$ の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ ですから，$b=-2a+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ に接するときに k が最大となります。$f(a)=-2a+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ とおけば，$f'(a)=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$ となり $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=-\dfrac{1}{2}$ から，$a=\dfrac{8}{9}$ が求まり，$b=-2a+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ に代入すれば，$b=\dfrac{8}{9}$ で，これらを，$c=1-a-b$ に代入すれば，$c=-\dfrac{7}{9}$ も求まります。これから $|ax+2b| \leqq M$ の M は，$\dfrac{8}{9}+\dfrac{16}{9}=\dfrac{24}{9}=\dfrac{8}{3}$ となります。

（注）$(b+2a)^2=8a$ と $a+2b=k$ を連立させて a の 2 次方程式を作り，それの判別式を考えれば，微分を使用しなくても k の値を求めることができます。

4　問題 6 が簡単に解けた理由

直線 $2a+b=k$ だと $b=-2a+k$ を考えることになるのですが，図 3 の右端の $a=2$ での微分係数は $f'(2)=-2+1=-1$ なので，-1 以下の傾きの場合は，すべて点 $(2, 0)$ を通るときに k が最大となってしまうのです。これが問題 6 が簡単に解けた理由だと思います。だから

> 「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\, ax^2+bx+c \,| \leqq 1$ となる任意の a，b，c に対して
> $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\, amx+b \,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？
> （ただし m は，$1 \leqq m$ を満たす定数とする。）

という問題なら，とても簡単で $(a,\ b)=(2,\ 0)$ のときで $M=2am$ となりますが，m の条件が「ただし m は，$0<m<1$ を満たす定数とする。」となっていると少し面倒になり，$b=-ma+k$

より $f'(a)=-m$ となる a を求める必要が出てきます。
　また，この改題その 1 の問題を証明問題として，

> $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|ax^2+bx+c| \leqq 1$ となる a，b，c に対して
> $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|ax+2b| \leqq \dfrac{8}{3}$ が成立することを証明せよ。

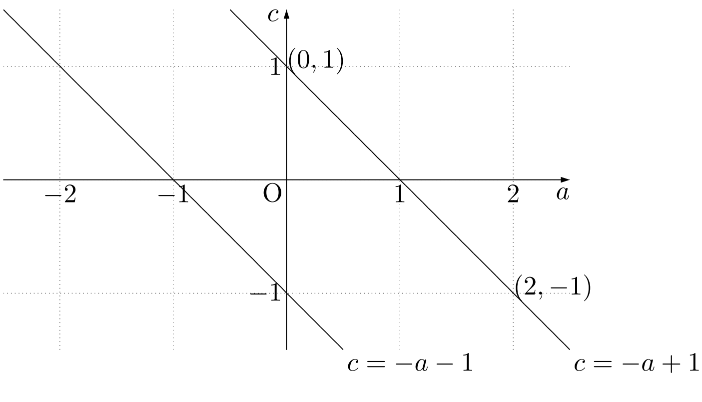
と出題されると，どうやって解くのでしょうか？私には補間法を利用しては解けないように思えますが，簡単な解法をご存じの先生がいらっしゃいましたら御教示ください。ついでに，この $\dfrac{8}{3}$ になるときの a，b，c の値を代入した 2 次関数を表示しておくと，
$y=\dfrac{8}{9}x^2+\dfrac{8}{9}x-\dfrac{7}{9}=\dfrac{8}{9}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$ という 2 次関数で，$x=1$ のとき，$y=1$ で，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=-1$ となる非常に特別な 2 次関数です。つまり，点 $(1,\ 1)$ を通り区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ の中で最小値 -1 をとる 2 次関数です。

5　改題その 2（$|ax+2c| \leqq M$ の場合）

> 改題その 2
> 「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2+bx+c\,| \leqq 1$ となる任意の a，b，c に対して
> 　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax+2c\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？

　$-1 \leqq a+b+c \leqq 1$ と $-1 \leqq a-b+c \leqq 1$ と $-1 \leqq \dfrac{b}{2a} \leqq 1$ のときは，$-1 \leqq \dfrac{4ac-b^2}{4a} \leqq 1$ を考える訳ですが $\cdots$。この場合少し実験してみるとわかりますが，$(a,\ c)$ 平面に射影した図では，頂点は影響せず，$-1 \leqq a+c \leqq 1$ と $-1 \leqq c \leqq 1$ だけ考えればいいようです。

図 4：



　$a+2c=k$ とおくと，点 $(0,\ 1)$ を通るときに最大となるので，$M=2$ です。
　この形のときは，いつでも簡単に解けます。

「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2 + bx + c\,| \leqq 1$ となる a，b，c に対して
　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,amx + c\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？
（ただし m は，$1 \leqq m$ を満たす定数とする。）

$1 \leqq m$ の場合は，$(a,\ c) = (2,\ -1)$ のときで $M = 4m - 1$ となり，$0 < m < 1$ の場合は，$(a,\ c) = (0,\ 1)$ のときで $M = 1$ となります。

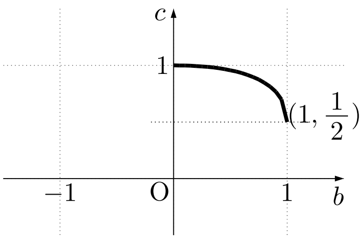
6　改題その 3（$|bx + c| \leqq M$ の場合）

改題その 3

「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2 + bx + c\,| \leqq 1$ となる a，b，c に対して
　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,bx + c\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？

このときも $-1 \leqq a + b + c \leqq 1$ と $-1 \leqq a - b + c \leqq 1$ と $-1 \leqq \dfrac{b}{2a} \leqq 1$ のときは，$-1 \leqq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \leqq 1$ も考える訳ですが $\cdots$。今度は，頂点が関係してきます。途中の計算は省略して $(b,\ c)$ 平面に射影した図だけ示しておきます。しかも図が見やすいように第 1 象限の部分だけ図をかくと，

図 5：



太線は $c = \sqrt{1 - b} + \dfrac{b}{2}$ のグラフです。
（この曲線より下にないとだめです。）

この領域において直線 $b + c = k$ が，共有点をもつように動くと考えると，傾きは -1 ですから $f(b) = \dfrac{b}{2} + \sqrt{1 - b}$ とおけば，$f'(b) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1 - b}}$ より，$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1 - b}} = -1$ から，$b = \dfrac{8}{9}$ が求まり，$c = \dfrac{7}{9}$　，$a = -\dfrac{8}{9}$ も求まります。これから $|bx + c| \leqq M$ の M は，$\dfrac{8}{9} + \dfrac{7}{9} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$ となります。

7　改題その1のもう1つの解法

改題その1

「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2+bx+c\,| \leqq 1$ となる任意の a，b，c に対して
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax+2b\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？

改題その1に対する別の解法の概略（これでは，厳密性に欠けますがご容赦下さい。）

点 $(1,\ 1)$ を通る2次関数 $y=a(x+\beta)^2-1$（ただし，$a>0$，$0 \leqq\beta\leqq 1$）を利用して考えることにします。もしこの条件の2次関数でない場合，問題の条件「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2+bx+c\,| \leqq 1$」を満たす a が，2次関数の a よりも大きな値をとることができてしまいます。そのため，最大となる $|ax+2b|$ を求める必要がある今回のケースではこの2次関数を利用することにしました。(説明が不十分ですが，いろいろ実験してみればわかると思います。）

$y=a(x+\beta)^2-1$ が点 $(1,\ 1)$ を通るので，$1=a(1+\beta)^2-1$ つまり $a=\dfrac{2}{(1+\beta)^2}$ となります。これを $y=a(x+\beta)^2-1$ に代入し，展開して係数を比較すると $b=\dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$，$c=\dfrac{2\beta^2}{(1+\beta)^2}-1$ です。$g(\beta)=a+2b$ に代入して，β だけの式にして，β で微分すると，$\beta=\dfrac{1}{2}$ で極値をとることがわかります（計算は省略)。これを a，b，c の式に代入すると，$a=\dfrac{8}{9}$，$b=\dfrac{8}{9}$，$c=-\dfrac{7}{9}$ となり，$a+2b=\dfrac{24}{9}=\dfrac{8}{3}$ という前に得られた値と同じになりました。(一応 UBASIC で数値実験も行って確認しました。）

このやり方で，次の改題その4を解いてみました。途中の計算を随分省略していますので，時間があるときにでもチェックしていただけるとありがたいです。またもっと便利な計算法をご存じの方は教えて下さい。

改題その4

「$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,ax^2+bx+c\,| \leqq 1$ となる a，b，c に対して
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,4ax^2+6bx+7c\,| \leqq M$ が成立する。」といえるような M の最小値は？

これも，$a>0$，$0 \leqq \beta \leqq 1$，頂点が $(-\beta,\ -1)$ の場合を考えて $y=a(x+\beta)^2-1$ とおき，さらにこの2次関数は，点 $(1,\ 1)$ を通るものとします。$y=a(x+\beta)^2-1$ が，点 $(1,\ 1)$ を通り，$1=a(1+\beta)^2-1$ より，つまり，$a=\dfrac{2}{(1+\beta)^2}$ となります。これを $y=a(x+\beta)^2-1$ に代入し，展開して，係数を比較すると $b=\dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$，$c=\dfrac{2\beta^2}{(1+\beta)^2}-1$ となります。このことが改題その4の場合も使えて，2次関数 $y=4ax^2+6bx+7c$ の頂点が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるときと，ないときとで場合分けしてやると，$\beta=\dfrac{10}{13}$ が微分等を使って求まります。 それは，$4a-6b+7c$ が最小になるときで，$M=\dfrac{177}{23}(=7.695652\cdots)$ のはずです。(一応 UBASIC で数値実験もしてみましたが $\cdots$ 完全とも言い切れるほど厳密に論理展開をしていませんので，もしも考え方の間違い，あるいは，計算等の誤りなどがありましたら教えてください。)