平成26年度 センター試験 (本試　平成26年1月19日実施)

数学I・数学A　(60分, 100点　全問必答)

第1問 (配点 20)

〔1〕 $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}},\ b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ とおく。

(1) $ab = \boxed{ア}$

$a+b = \boxed{イ}\left(\boxed{ウエ} + \sqrt{\boxed{オ}}\right)$

$a^2+b^2 = \boxed{カ}\left(\boxed{キ} - \sqrt{\boxed{ク}}\right)$

である。

(2) $ab = \boxed{ア}$ と $a^2+b^2+4(a+b) = \boxed{ケコ}$ から，a は

$a^4 + \boxed{サ}\,a^3 - \boxed{シス}\,a^2 + \boxed{セ}\,a + \boxed{ソ} = 0$

を満たすことがわかる。

〔2〕 集合 U を $U = \{n | n$ は $5 < \sqrt{n} < 6$ を満たす自然数 $\}$ で定め，また，U の部分集合 P, Q, R, S を次のように定める。

$P = \{n | n \in U$ かつ n は4の倍数 $\}$　　$Q = \{n | n \in U$ かつ n は5の倍数 $\}$
$R = \{n | n \in U$ かつ n は6の倍数 $\}$　　$S = \{n | n \in U$ かつ n は7の倍数 $\}$

全体集合を U とする。集合 P の補集合を $\overline{P}$ で表し，同様に Q, R, S の補集合をそれぞれ $\overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$ で表す。

(1) U の要素の個数は $\boxed{タチ}$ 個である。

(2) 次の⓪～④で与えられた集合のうち，空集合であるものは $\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ である。$\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ の順序は問わない。

⓪ $P \cap R$　　① $P \cap S$　　② $Q \cap R$　　③ $P \cap \overline{Q}$　　④ $R \cap \overline{Q}$

(3) 集合 X が集合 Y の部分集合であるとき，$X \subset Y$ と表す。このとき，次の⓪～④のうち，部分集合の関係について成り立つものは $\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$ である。

$\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$ の解答の順序は問わない。

⓪ $P \cup R \subset \overline{Q}$　　① $S \cap \overline{Q} \subset P$　　② $\overline{Q} \cap \overline{S} \subset \overline{P}$　　③ $\overline{P} \cup \overline{Q} \subset \overline{S}$　　④ $\overline{R} \cap \overline{S} \subset \overline{Q}$

第2問 (配点 25)

a を定数とし，x の2次関数 $y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36$ …① のグラフを G とする。G の頂点の座標は $\left(\boxed{ア}\,a,\ \boxed{イ}\,a^2 - \boxed{ウ}\,a - \boxed{エオ}\right)$ である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1) $p = -27$ のとき，a の値は $a = \boxed{カ}$，$\boxed{キク}$ である。$a = \boxed{カ}$ のときの①のグラフを x 軸方向に $\boxed{ケ}$，y 軸方向に $\boxed{コ}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{キク}$ のときの①のグラフに一致する。

(2) 下の $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ には，次の ⓪ ～ ③ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

G が x 軸と共有点を持つような a の値の範囲を表す不等式は $\boxed{\text{サシ}}$ $\boxed{\text{ス}}$ a $\boxed{\text{セ}}$ $\boxed{\text{ソ}}$ $\cdots$② である。a が②の範囲にあるとき，p は，$a=\boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チツテ}}$ をとり，$a=\boxed{\text{ト}}$ で最大値 $\boxed{\text{ナニ}}$ をとる。G が x 軸と共有点を持ち，さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は $\boxed{\text{ヌネ}}$ $\boxed{\text{ノ}}$ a $\boxed{\text{ハ}}$ $\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

第3問　(配点 30)

△ABC は，AB=4，BC=2，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}$ を満たすとする。このとき CA=$\boxed{\text{ア}}$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，△ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。∠ABC の二等分線と ∠BAC の二等分線の交点を D，直線 BD と辺 AC の交点を E，直線 BD と円 O との交点で B と異なる交点を F とする。

(1) このとき AE=$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，BE=$\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$，BD=$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ となる。

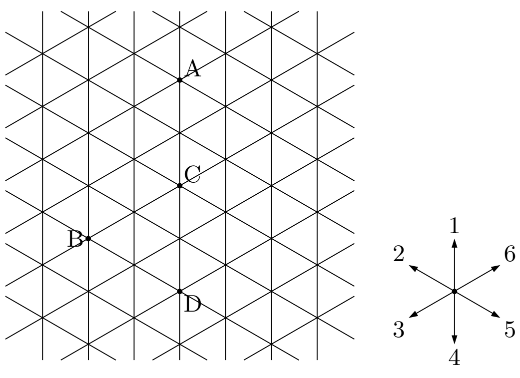
(2) △EBC の面積は △EAF の面積の $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 倍である。

(3) 角度に注目すると，線分 FA，FC，FD の関係で正しいのは $\boxed{\text{ネ}}$ であることが分かる。$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ FA $<$ FC $=$ FD　　① FA $=$ FC $<$ FD　　② FC $<$ FA $=$ FD
③ FD $<$ FC $<$ FA　　④ FA $=$ FC $=$ FD　　⑤ FD $<$ FC $=$ FA

第4問　(配点 25)

下の図は，ある町の街路図の一部である。



ある人が，交差点 A から出発し，次の規則に従って，交差点から隣の交差点への移動を繰り返す。

① 街路上のみを移動する。
② 出発前にサイコロを投げ，出た目に応じて上図の 1∼6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。
③ 交差点に達したら，再びサイコロを投げ，出た目に応じて図の 1∼6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。(一度通った道を引き返すこともできる。)
④ 交差点に達するたびに，③と同じことを繰り返す。

(1) 交差点 A を出発し，4 回移動して交差点 B にいる移動の仕方について考える。この場合，3 の矢印の方向の移動と 4 の矢印の方向の移動をそれぞれ 2 回ずつ行うので，このような移動の仕方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。

(2) 交差点 A を出発し，3 回移動して交差点 C にいる移動の仕方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。

(3) 交差点 A を出発し，6 回移動することを考える。このとき，交差点 A を出発し，3 回の移動が終わった時点で交差点 C にいて，次に 3 回移動して交差点 D にいる移動の仕方は $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りあり，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキクケ}}}$ である。

(4) 交差点 A を出発し，6 回移動して交差点 D にいる移動の仕方について考える。

- 1 の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{\text{コ}}$ 通りある。
- 2 の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある。
- 6 の矢印の向きの移動を含むものも $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある。
- 上記 3 つ以外の場合，4 の矢印の向きの移動は $\boxed{\text{ス}}$ 回だけに決まるので，移動の仕方は $\boxed{\text{セソ}}$ 通りある。

よって，交差点 A を出発し，6 回移動して交差点 D にいる移動の仕方は $\boxed{\text{タチツ}}$ 通りある。

数学II・数学B (60 分, 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 Oを原点とする座標平面において，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を中心とする円 C が，方程式 $y=\dfrac{4}{3}x$ で表される直線 ℓ に接しているとする。

(1) 円 C の半径 r を求めよう。点 P を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$y=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x-p)+q$ なので，P から ℓ に引いた垂線と ℓ の交点 Q の座標は

$\left(\dfrac{3}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right),\ \dfrac{4}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right)\right)$ となる。求める C の半径 r は，P と ℓ の距離 PQ に等しいので $r=\dfrac{1}{5}\left|\boxed{\text{オ}}\,p-\boxed{\text{カ}}\,q\right|$ $\cdots$① である。

(2) 円 C が，x 軸に接し，点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通る場合を考える。このとき，$p>0, q>0$ である。C の方程式を求めよう。C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい。したがって，①により，$p=\boxed{\text{キ}}\,q$ である。C は点 R を通るので，求める C の方程式は

$\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ケ}}\right)^2=\boxed{\text{コ}}$ $\cdots$② または

$\left(x-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}}$ $\cdots$③ であることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

(3) 方程式②の表す円の中心を S，方程式③の表す円の中心を T とおくと，直線 ST は原点 O を通り，点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ 1:1 に内分　　① 1:2 に内分　　② 2:1 に内分
③ 1:1 に外分　　④ 1:2 に外分　　⑤ 2:1 に外分

〔2〕自然数 m, n に対して，不等式 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3 \quad \cdots ④$ を考える。

$m = 2, n = 1$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり，この m, n の値の組は④を満たす。

$m = 4, n = 3$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり，この m, n の値の組は④を満たさない。

不等式④を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④は

$\log_2 m + \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leqq \boxed{\text{テ}} \quad \cdots ⑤$ と変形できる。n が自然数のとき，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから，⑤により，$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ により，$m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし，$\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，⑤は，$\log_3 n \leqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり，$n^2 \leqq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。

よって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき，⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leqq \boxed{\text{ヒ}}$ である。

したがって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして，$m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

第 2 問　(必答問題) (配点 30)

p を実数とし，$f(x) = x^3 - px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\, x^{\boxed{\text{イ}}} - p$ である。したがって，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば，$\boxed{\text{ア}}\, a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに，$x = a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪ $p = 0$　　① $p > 0$　　② $p \geqq 0$　　③ $p < 0$　　④ $p \leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。$f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p = \boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

曲線 C の接線で，点 A を通り傾きが 0 でないものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよう。ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，ℓ の方程式は b を用いて

$y = \left(\boxed{\text{ケ}}\, b^2 - \boxed{\text{コ}}\right)(x - b) + f(b)$ と表すことができる。また，ℓ は点 A を通るから，方

程式 $\boxed{\text{サ}}\,b^3 - \boxed{\text{シ}}\,b^2 + 1 = 0$ を得る。この方程式を解くと，$b = \boxed{\text{ス}}$ ，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが，ℓ の傾きが 0 でないことから，ℓ の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。点 A を頂点とし，原点を通る放物線を D とする。ℓ と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x \geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。D の方程式は $y = \boxed{\text{ニ}}\,x^2 - \boxed{\text{ヌ}}\,x$ であるから，定積分を計算することにより，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

第 3 問　(選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ の初項は 6 であり，$\{a_n\}$ の階差数列は初項が 9，公差が 4 の等差数列である。

(1) $a_2 = \boxed{\text{アイ}}$ ，$a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $\boxed{\text{オ}}\,n + \boxed{\text{カ}}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = \boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}}\,n + \boxed{\text{コ}}$ $\cdots$① である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{2}{5}$ で，漸化式 $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1} - 1}b_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ $\cdots$② を満たすとする。

$b_2 = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。数列 $\{b_n\}$ の一般項と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよう。①，②により，すべての自然数 n に対して $b_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{タ}}}b_n$ $\cdots$③ が成り立つことがわかる。

ここで $c_n = \left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}\right)b_n$ $\cdots$④ とするとき，③を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると，すべての自然数 n に対して $\left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{チ}}\right)c_{n+1} = \left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ツ}}\right)c_n$ が成り立つことがわかる。これにより $d_n = \left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{テ}}\right)c_n$ $\cdots$⑤ とおくと，すべての自然数 n に対して，$d_{n+1} = d_n$ が成り立つことがわかる。$d_1 = \boxed{\text{ト}}$ であるから，すべての自然数 n に対して，$d_n = \boxed{\text{ト}}$ である。したがって，④と⑤により，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{テ}}\right)}$ である。また

$b_n = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}\right)} - \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{テ}}\right)}$ が成り立つことを利用すると，

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\,n}{\boxed{\text{ネ}}\,n + \boxed{\text{ノ}}}$ であることがわかる。

第 4 問　(選択問題) (配点 20)

座標空間において，立方体 OABC-DEFG の頂点を O(0，0，0)，A(3，0，0)，B(3，3，0)，C(0，3，0)，D(0，0，3)，E(3，0，3)，F(3，3，3)，G(0，3，3) とし，OD を 2:1 に内分する点を K，OA を 1:2 に内分する点を L とする。BF 上の点 M，FG 上の点 N および K，L の 4 点は同一平面上にあり，四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

(1) 四角形 KLMN の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ を成分で表すと $\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \left(\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}\right)$ となり，四角形 KLMN が平行四辺形であることにより，$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{\text{オ}}$ である。$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$　① $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$　② $\overrightarrow{\mathrm{NM}}$　③ $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

ここで，M(3, 3, s)，N(t, 3, 3) と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{\text{オ}}$ であるので，$s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ となり，N は FG を 1: $\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ について $\overrightarrow{\mathrm{LK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\text{ケ}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{LK}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ となるので，四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2) 四角形 KLMN を含む平面を α とし，点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を ℓ，α と ℓ の交点を P とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ と三角錐(すい)OLMN の体積を求めよう。P(p, q, r) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ と垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\text{ソ}}$ となるので，$p = \boxed{\text{タ}}\,r$，$q = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}r$ であることがわかる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PL}}$ が垂直であることにより $r = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ を求めると

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 OLMN の高さであるから，三角錐 OLMN の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

次の表は，あるクラスの生徒 9 人に対して行われた英語と数学のテスト（各 20 点満点）の得点をまとめたものである。ただし，テストの得点は整数値である。また，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

	英 語	数 学
生徒 1	9	15
生徒 2	20	20
生徒 3	18	14
生徒 4	18	17
生徒 5	A	8
生徒 6	18	C
生徒 7	14	D
生徒 8	15	14
生徒 9	18	15
平均値	16.0	15.0
分 散	B	10.00
相関係数	0.500	

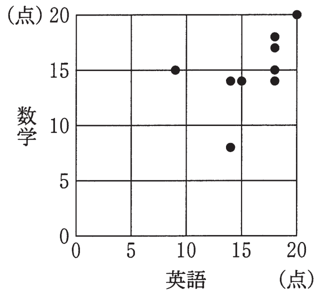
以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1) 生徒 5 の英語の得点 A は $\boxed{\text{アイ}}$ 点であり，9 人の英語の得点の分散 B の値は $\boxed{\text{ウエ}}.\boxed{\text{オカ}}$ である。また，9 人の数学の得点の平均値が 15.0 点であることと，英語と数学の得点の相関係数の値が 0.500

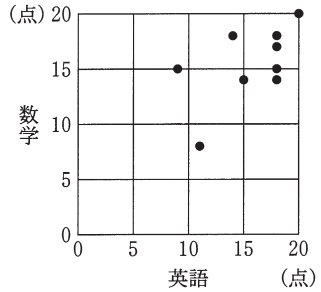
であることから，生徒 6 の数学の得点 C と生徒 7 の数学の得点 D の関係式 C＋D＝ $\boxed{\text{キク}}$ C－D＝ $\boxed{\text{ケ}}$ が得られる。したがって，C は $\boxed{\text{コサ}}$ 点，D は $\boxed{\text{シス}}$ 点である。

(2) 9 人の英語と数学の得点の相関図（散布図）として適切なものは $\boxed{\text{セ}}$ である。 $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

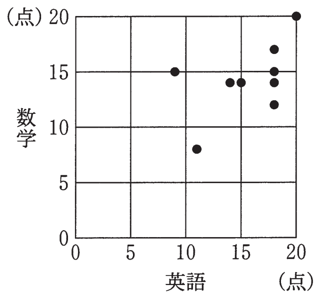
⓪



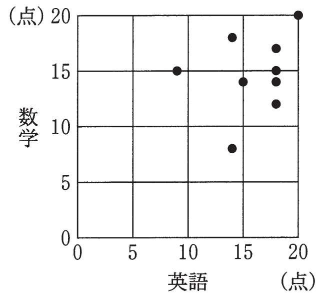
①



②



③



(3) 生徒 10 が転入したので，その生徒に対して同じテストを行った。次の表は，はじめの 9 人の生徒に生徒 10 を加えた 10 人の得点をまとめたものである。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

	英 語	数 学
生徒 1	9	15
生徒 2	20	20
生徒 3	18	14
生徒 4	18	17
生徒 5	A	8
生徒 6	18	C
生徒 7	14	D
生徒 8	15	14
生徒 9	18	15
生徒 10	6	F
平均値	E	14.0
分 散	18.00	18.00
相関係数	0.750	

10 人の英語の得点の平均値 E は $\boxed{\text{ソタ}}$. $\boxed{\text{チ}}$ 点であり，生徒 10 の数学の得点 F は $\boxed{\text{ツ}}$ 点である。

(4) 生徒 10 が転入した後で 1 人の生徒が転出した。残った 9 人の生徒について，英語の得点の平均値は 10 人の平均値と同じ $\boxed{\text{ソタ}}$. $\boxed{\text{チ}}$ 点，数学の得点の平均値は 10 人の平均値と同じ 14.0 点であっ

た。転出したのは生徒 $\boxed{\text{テ}}$ である。また，英語について，10 人の得点の分散の値を v，残った 9 人の得点の分散の値を v' とすると $\dfrac{v'}{v} = \boxed{\text{ト}}$ が成り立つ。さらに，10 人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r，残った 9 人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r' とすると $\dfrac{r'}{r} = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ -1　　① 1　　② $\dfrac{9}{10}$

③ $\left(\dfrac{9}{10}\right)^2$　　④ $\dfrac{10}{9}$　　⑤ $\left(\dfrac{10}{9}\right)^2$

第 6 問 (選択問題) (配点 20)

2 以上の自然数 N に対して，1 から N までの自然数の積 $N! = 1 \times 2 \times \cdots \times N$ の素因数分解を考える。

(1) $N = 6$ のとき，$N!$ の素因数分解は $6! = 2^{\boxed{\text{ア}}} \times 3^{\boxed{\text{イ}}} \times 5$ である。$6!$ は，素因数 2 を $\boxed{\text{ア}}$ 個，素因数 3 を $\boxed{\text{イ}}$ 個，素因数 5 を 1 個もつ。

(2) $N!$ がもつ素因数 2 の個数を求める方法について考えよう。まず，$\dfrac{N}{2}$ の整数部分を M とおく。N 以下の自然数の中には，M 個の偶数 2，4，$\cdots$，$2M$ がある。その他の奇数の積を Q とおくと，$N!$ は次のように表すことができる。

$$N! = Q \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2M = Q \times 2^M \times M!$$

したがって，$N!$ は少なくとも M 個の素因数 2 をもつことがわかる。さらに，$M!$ がもつ素因数 2 の個数を求めるために，$N!$ に対する手順を $M!$ に対して再び用いることができる。つまり，$N!$ がもつ素因数 2 の個数を求めるためには，N から $\dfrac{N}{2}$ の整数部分である M を求め，M を改めて N と考えて，同じ手順を用いて新しく M を求める，という手順の繰り返しを $M < 2$ となるまで行えばよい。この手順の繰り返しで求められたすべての M の和が，$N!$ がもつ素因数 2 の個数である。たとえば，$N = 13$ の場合には，$\dfrac{13}{2} = 6.5$ であるから，$M = 6$ となる。この手順を繰り返して M を求めた結果は，N から M を求める手順を矢印 ($\rightarrow$) で表すと，次のようにまとめられる。

$$13 \rightarrow \mathbf{6} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1}$$

太字で表された 6，3，1 が，この手順を繰り返して求められた M の値である。それらの和 $6+3+1 = 10$ が，$13!$ のもつ素因数 2 の個数である。

この手順にしたがって，2 以上の自然数 N を入力して，$N!$ がもつ素因数 2 の個数を出力する〔プログラム 1〕を作成した。ただし，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム 1〕

```
100   INPUT PROMPT "N=":N
110   LET D=2
120   LET C=0
130   LET M=N
140   FOR J=1 TO N
150       LET M=INT(M/D)
160       LET [ ウ ]
170       IF [ エ ] THEN GOTO 190
180   NEXT J
190   PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
200   END
```

〔プログラム 1〕の $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ C=C+1　　① C=M　　② C=C+M　　③ C=C+M+1

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ M>=D　　① M=D　　② M<=D　　③ M<D　　④ M>D

〔プログラム 1〕を実行し，変数 N に 101 を入力する。170 行の「GOTO 190」が実行されるときの変数 J の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，190 行で出力される変数 C の値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(3) $N!$ がもつ素因数 2 の個数を求める方法は，他の素因数の個数についても同様に適用できる。たとえば，$N!$ がもつ素因数 5 の個数を求める場合は，まず，$\dfrac{N}{5}$ の整数部分を M とおく。N 以下の自然数の中には M 個の 5 の倍数があるので，$N!$ は少なくとも M 個の素因数 5 をもつ。また，これらの M 個の 5 の倍数を 5 で割った商は 1，2，$\cdots$，M である。$M!$ の中の素因数 5 の個数を求めるためには，M を N と考えて，同じ手順を繰り返せばよい。したがって，$N!$ がもつ素因数 5 の個数を求めるためには,〔プログラム 1〕の $\boxed{\text{クケコ}}$ 行を $\boxed{\text{サ}}$ に変更すればよい。$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ INPUT PROMPT "N=":N　　① INPUT PROMPT "C=":C
② INPUT PROMPT "M=":M　　③ LET C=5
④ LET D=5　　⑤ LET M=D

変更した〔プログラム 1〕を実行することにより，2014！は素因数 5 を $\boxed{\text{シスセ}}$ 個もつことがわかる。したがって，2014！がもつ素因数 2 の個数と素因数 5 の個数について考えることにより，2014！を 10 で割り切れる限り割り続けると，$\boxed{\text{ソタチ}}$ 回割れることがわかる。

(4) N 以下のすべての素数が，$N!$ の素因数として含まれる。その個数は，素数 2 や素数 5 の場合と同様に求められる。N 以下のすべての素因数について，$N!$ がもつ素因数とその個数を順に出力するように,〔プログラム 1〕を変更して〔プログラム 2〕を作成した。行番号に下線が引かれた行は，変更または追加された行である。ただし，繰り返し処理「FOR K=A TO B ～ NEXT K」において，A が B より大きい場合，この繰り返し処理は実行されず次の処理に進む。

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT PROMPT "N=":N
110  FOR D=2 TO N
111      FOR K=2 TO D-1
112          IF [ ツ ] THEN [ テ ]
113      NEXT K
120      LET C=0
130      LET M=N
140      FOR J=1 TO N
150          LET M=INT(M/D)
160          LET [ ウ ]
170          IF [ エ ] THEN GOTO 190
180      NEXT J
190      PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
191  NEXT D
200  END
```

〔プログラム 2〕の 111 行から 113 行までの処理は，D が素数であるかどうかを判定するためのものである。 ツ ， テ に当てはまるものを，次の⓪ ～ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ INT(D/K)=1　　① INT(D/K)>1　　② D=INT(D/K)*K

③ D<>INT(D/K)*K　　④ GOTO 120　　⑤ GOTO 130

⑥ GOTO 180　　⑦ GOTO 190　　⑧ GOTO 191

〔プログラム 2〕を実行し，変数 N に 26 を入力したとき，190 行は ト 回実行される。 ト 回のうち，変数 C の値が 2 となるのは ナ 回である。