分数式の約分

磯辺高等学校 氏家 悟

昨年度前任校で，学期末の時間に，3 年理系クラスの生徒を対象に分数式の約分にユークリッドの互除法を用いる方法を取り上げた。

1 普通の分数

整数でのユークリッドの互除法を教えたことのない生徒たちだったので，まずは，普通の分数から行った。教材自体は昨年度の $\alpha-\omega$ 50 号に紹介したものから数を減らして，6 問を全員に電卓を配付して取り組ませた。

1. $\dfrac{5184}{5832}$	2. $\dfrac{4752}{5616}$	3. $\dfrac{6109}{6407}$
4. $\dfrac{5781}{6063}$	5. $\dfrac{12528}{19872}$	6. $\dfrac{62821427}{62884891}$

最後は，電卓で順に割っていく方法で素因数分解するのはまず不可能である。素因数は 1000 番目くらいの素数なので，順に割っていっては，数時間かかる。

ところが互いに順に引いていく（割った余りを求める）だけで，約分が完成し，それが既約であることも保証される。

2 分数式

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$	2. $\dfrac{x^3-2x+1}{x^3+3x^2+x-2}$
3. $\dfrac{x^4+2x^3+x^2-1}{x^4+3x^3+x^2-2}$	4. $\dfrac{x^4+3x^3+6x^2+6x+4}{x^4-x^3+2x^2-2x+4}$

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ は，分子，分母をそれぞれ因数分解すれば，共通因数がみつかる。

互除法では，

$(x^2-3x+2)-(x^2-5x+6)=2x-4=2(x-2)$

$(x^2-5x+6)-x(x-2)=-3x+6=-3(x-2)$ より，最大公約数 $x-2$

これで分子，分母を割る。

因数分解が簡単な場合は，こちらのほうが手間がかかるが，仕組みを理解するには，答えが簡単に求められるものがよい。

次数が合うように単項式をかけて引き算をしているだけなので，整数の互除法と違って，とても易しい計算であり，またそれが割り算の構造そのものといえる。

整数の最大公約数では，余りをそのまま使うが，多項式では定数倍は無視してよい。なぜなら割り算においては，適当に定数倍し，係数を合わせて引くからである。

2. $\dfrac{x^3-2x+1}{x^3+3x^2+x-2}$ は，因数定理で因数分解ができる。

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1) \qquad x^3+3x^2+x-2=(x+2)(x^2+x-1)$$

互除法では，

$(x^3-2x+1)-(x^3+3x^2+x-2)=-3x^2-3x+3=-3(x^2+x-1)$
$(x^3+3x^2+x-2)-x(x^2+x-1)=2x^2+2x-2=2(x^2+x-1)$
より，最大公約数 x^2+x-1. これで分子，分母を割る。

3. $\dfrac{x^4+2x^3+x^2-1}{x^4+3x^3+x^2-2}$ は，有理数の範囲で因数分解できるのは 2 次式までなので，因数定理が使えない。したがって互除法でやるしかない。

$(x^4+2x^3+x^2-1)-(x^4+3x^3+x^2-2)=-x^3+1=-(x^3-1)$
$(x^4+3x^3+x^2-2)-x(x^3-1)=3x^3+x^2+x-2$
$(3x^3+x^2+x-2)-3(x^3-1)=x^2+x+1$
$(x^3-1)-x(x^2+x+1)=-x^2-x-1=-(x^2+x+1)$
より，最大公約数 x^2+x+1. これで分子，分母を割って，$\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2x-2}$

普通は $3(x^3-1)$ を引いて，x^2+x+1 が出た時点で，それが最大公約数とわかる.

4. $\dfrac{x^4+3x^3+6x^2+6x+4}{x^4-x^3+2x^2-2x+4}$ も，有理数の範囲で因数分解できるのは 2 次式までである。

$(x^4+3x^3+6x^2+6x+4)-(x^4-x^3+2x^2-2x+4)=4x^3+4x^2+8x=4x(x^2+x+2)$
元の多項式には因数 x はないので，x^2+x+2 の倍数を引く.
$(x^4-x^3+2x^2-2x+4)-x^2(x^2+x+2)=-2x^3-2x+4=-2(x^3+x-2)$
$(x^3+x-2)-x(x^2+x+2)=-x^2-x-2=-(x^2+x+2)$
より，最大公約数 x^2+x+2. これで分子，分母を割って，$\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$

互除法は整数では，巨大数の最大公約数がたやすく求まるし，多項式では因数分解が不要となるわけである。

実際の授業では，こちらもあまり慣れていないこともあって，後半かなり時間が無くなり，生徒が置いてきぼりになった感があった。